

7. РЯДИ ДИНАМІКИ

7.1. Поняття рядів динаміки та їх класифікація

Динамічний ряд – це послідовність чисел, які характеризують зміну соціально-економічного явища. Динамічний ряд – перелік хроно-логічних моментів (дат) або інтервалів часу і їм відповідні статистичні показники, які називають – **рівнями ряду**. За ознакою часу ряди динаміки поділяються на **інтервальні** та **моментні**. У математичній статистиці ряд динаміки – це реалізація випадкового процесу. У стаціонарних випадкових процесах основні характеристики обчислюються за однією реалізацією, тому що є рівновага щодо певного середнього рівня. На жаль, динамічні процеси в економіці нестационарні та інерційні.

При вивченні закономірностей статистика розв'язує завдання: вимірює **інтенсивність динаміки, описує тенденції, оцінює структурні зрушення, сталість і коливання рядів**.

Передумовою аналізу динамічного ряду є порівнянність статистичних даних. **Порівнянність статистичних даних** забезпечується наявністю таких факторів:

- незмінність у методології обліку та розрахунку показників, використання однакових одиниць вимірювання;
- незмінність у структурі сукупності;
- рівні критичні моменти реєстрації даних;
- незмінність цін для вартісних показників.

Характеристики інтенсивності динаміки: якщо відносно постійної бази – так вони називаються **базисними**; якщо кожен рівень ряду порівнюється з попереднім – так вони називаються **ланцюговими**.

7.2. Характеристики рядів динаміки

Абсолютний приріст – абсолютний розмір збільшення (зменшення) рівня ряду за певний часовий інтервал і обчислюється як різниця рівнів ряду:

$$\text{– базисний абсолютний приріст } \Delta_t = y_t - y_0, \quad (7.1)$$

$$\text{– ланцюговий абсолютний приріст } \Delta_t = y_t - y_{t-1},$$

де $t = 0, 1, 2, \dots, n$ – номери рівнів ряду динаміки,

y_t – рівень « t » ряду динаміки.

Темп зростання k_t – показує, у скільки разів рівень y_t , більший (менший) від:

- базисного $k_t = y_t / y_0$ – базисний темп зростання;
- попереднього $k_t = y_t / y_{t-1}$ – ланцюговий темп зростання.

Треба звернути увагу, що:

$$\sum_1^n (y_t - y_{t-1}) = y_n - y_0; \quad (7.2)$$

$$k_n = \frac{y_1}{y_0} \times \frac{y_2}{y_1} \times \dots \times \frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_0} \quad (7.3)$$

Абсолютний приріст та темп зростання, якщо вони ланцюгові, так відображають відповідно абсолютну та відносну швидкість динаміки:

$$k_t = \frac{y_{t-1} + \Delta_t}{y_{t-1}} = 1 + \frac{\Delta_t}{y_{t-1}}, \quad (7.4)$$

$$\text{де } T_t = \frac{\Delta_t}{y_{t-1}} \text{ – відносне прискорення;} \quad (7.5)$$

$$\text{або у відсотках – темп приросту } T_t = (k_t - 1) 100\%. \quad (7.6)$$

Порівняння двох рядів динаміки у статистиці здійснюється відношенням темпів зростання, яке називають **коефіцієнтом випередження**:

$$k_b = \frac{k'_t}{k''_t}, \quad (7.7)$$

де k'_t, k''_t – темп зростання першого та другого рядів динаміки.

З метою узагальнення коливань рядів використовують **середні рівні ряду динаміки**. Для інтервального ряду середній рівень – проста середня арифметична. Для моментного ряду середній рівень – середня хронологічна.

Узагальнюючими характеристиками інтенсивності динаміки є:

– середній абсолютний приріст

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_1^n \Delta_t}{n} = \frac{1}{n} \sum_1^n (y_t - y_{t-1}); \quad (7.8)$$

та середній темп зростання

$$\bar{k} = \sqrt[n]{k_1 k_2 \dots k_n} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}, \quad (7.9)$$

де n – кількість інтервалів ряду динаміки.

Загальна тенденція ряду динаміки – певна закономірність зміни рівнів динамічного ряду. Коливання рівнів у ряду заважають виявленню основної тенденції зміни явища або процесу.

З метою виявлення основної тенденції використовують згладжування та аналітичне вирівнювання динамічних рядів. **Згладжування ряду динаміки** – укрупнення інтервалів часу та заміна первинного ряду рядом середніх за інтервалами.

При **аналітичному вирівнюванню динамічного ряду** фактичні значення рівнів замінюються значеннями, обчисленими на основі певної функції $Y=f(t)$, яку і називають **трендовим рівнянням**. Вибір типу функції ґрунтується на попередньому аналітичному аналізі суті явища. Продовження виявленої тенденції за межі ряду динаміки називають **екстраполяцією тренду**. Знаходження проміжних значень ряду динаміки мають назву **інтерполяції ряду динаміки**.

7.3. Порівняння рядів динаміки

Методи порівняння рядів, які є непорівнянними:

- прямі перерахунки даних;
- непрямі перерахунки даних (метод ключів);
- змикання рядів;
- зведення рядів до однакової основи;
- поділення ряду на інші періоди.

7.4. Згладжування рядів динаміки:

- метод плінних середніх;
- згладжування дискретного ряду динаміки за допомогою ряду Фур'є.

До уваги приймемо перші три члени ряду:

$$a_0 = \frac{\sum_1^n y_i}{n};$$
$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t, \quad a_1 = \frac{2 \sum_1^n y_i \cos t_i}{n};$$
$$a_2 = \frac{2 \sum_1^n y_i \sin t_i}{n},$$

де y_i – « i »-ий рівень незгладженого ряду, \hat{Y} – згладжений ряд динаміки (показник); t – умовний аргумент згладженості ряду динаміки; a_0, a_1, a_2 – параметри згладженого ряду динаміки.

$$t_i = \frac{2\pi(x_i - x_{\min})}{n}, \text{ рад} - \text{умовний аргумент інтервального ряду динаміки};$$

$$t_i = \frac{2\pi(x_i - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}}, \text{ рад} - \text{умовний аргумент моментального ряду динаміки};$$

x_i – « i »-а факторна ознака незгладженого ряду;

x_{\min} – найменше значення факторної ознаки;

x_{\max} – найбільше значення факторної ознаки;

n – кількість інтервалів ряду динаміки.

Завдання для самоконтролю

1. Що характеризують ряди динаміки?

2. Назвіть передумови аналізу динамічних рядів.
3. Які характеристики динамічних рядів називають базисними, а які ланцюговими?
4. Які ряди динаміки називають ланцюговими, а які називають базисними?
5. Що характеризує та як розраховується темп зростання?
6. Що характеризує та як розраховується темп приросту (відносно прискорення)?
7. Як розраховується і що характеризує коефіцієнт випередження?
8. З якою метою використовуються середні рівні ряду?
9. Чому дорівнює середній абсолютний приріст?
10. Чому дорівнює середній темп зростання?
11. Що таке загальна тенденція динамічного ряду?
12. З якою метою виконується згладжування динамічного ряду?
13. У чому полягає аналітичне вирівнювання динамічного ряду?
14. Яку функцію називають трендовим рівнянням?
15. Чим інтерполяція динамічного ряду відрізняється від екстра-поляції?
16. Назвіть методи порівняння рядів, які є непорівнянними.
17. У чому полягає метод прямого перерахунку даних при порівнянні рядів динаміки?
18. У чому полягає метод змикання рядів (метод ключів) при порівнянні рядів динаміки?
19. У чому полягає метод зведення рядів до однакової основи при порівнянні рядів динаміки?
20. У чому полягає метод поділення ряду на інші періоди при порівнянні рядів динаміки?
21. У чому полягає метод плинних середніх при порівнянні рядів динаміки?
22. Як здійснюється згладжування дискретного ряду динаміки за допомогою ряду Фур'є?

Задачі

7.1. За даними про кількість працюючих та обсяги виробництва підприємства:

- а) вкажіть види динамічних рядів, поясніть їх особливості;
- б) визначте середньквартальну кількість працюючих;
- в) визначте ряд динаміки похідного показники – продуктивності праці;
- г) для кожного ряду розрахуйте базисні та ланцюгові абсолютні прирости, поясніть їх зміст та взаємозв'язок.

Таблиця 7.1

Показник	Минулий рік, квартал				Поточний рік, I кв.
	I	II	III	IV	
Кількість працюючих на початок кварталу, чол.	82	78	74	76	78
Обсяг виробництва, тис. гр. од.	2816	2774	2835	3003	3045

Розв'язок:

а) Кількість працюючих – моментний ряд, так як показує стан на визначений момент часу (на початок кварталу).

Обсяг виробництва – інтервальний ряд, так як показує результат за проміжок часу (квартал).

б) середньквартальну кількість працюючих визначаємо за формулою середньої хронологічної (так як ряд є моментним):

$$\bar{x} = \frac{\frac{x_1 + x_n}{2} + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1};$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{82 + 78}{2} + 78 + 74 + 76}{4} = 77 \text{ чол.}$$

в) продуктивність праці – це відношення обсягу виробництва до кількості працюючих. Але обсяг виробництва – ряд інтервальний, кількість працюючих на початок кварталу – моментний. Тому:

$$P_1 = \frac{2816}{82 + 78} = 35,2;$$

$$P_2 = \frac{2774}{78 + 74} = 36,5;$$

$$P_3 = \frac{2835}{74 + 76} = 37,8;$$

$$P_4 = \frac{3003}{76 + 78} = 39.$$

г) ланцюгові абсолютні прирости $\Delta y = y_t - y_{t-1}$.

Кількість працюючих:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0 = 82 - 78 = -4;$$

$$\Delta y_2 = 74 - 78 = -4;$$

$$\Delta y_3 = 76 - 74 = 2;$$

$$\Delta y_4 = 78 - 76 = 2.$$

Обсяг виробництва:

$$\Delta y_1 = 2774 - 2816 = -42;$$

$$\Delta y_2 = 2835 - 2774 = 61;$$

$$\Delta y_3 = 3003 - 2835 = 168;$$

$$\Delta y_4 = 3045 - 3003 = 42.$$

Продуктивність праці:

$$\Delta y_1 = 36,5 - 35,2 = 1,3;$$

$$\Delta y_2 = 37,8 - 36,5 = 1,3;$$

$$\Delta y_3 = 39 - 37,8 = 1,2;$$

Базисний абсолютний приріст: $\Delta y = y_t - y_0$.

$$\text{Кількість працюючих } \Delta_{y(5-0)} = y_5 - y_0 = 78 - 82 = -4.$$

$$\text{Обсяг виробництва } \Delta y = 3045 - 2816 = 229.$$

$$\text{Продуктивність праці } \Delta y = 39 - 34,3 = 4,7.$$

Взаємозв'язок: сума ланцюгових абсолютних приростів дорівнює базисному.

$$\text{Кількість працюючих: } -4 + (-4) + 2 + 2 = -4.$$

$$\text{Обсяг виробництва: } -42 + 61 + 168 + 42 = 229.$$

$$\text{Продуктивність праці: } 1,13 + 2,7 + 1,2 - 0,5 = 4,7.$$

7.2. За даними про капітал та прибуток комерційного банку:

- вказіть види динамічних рядів, поясніть їх особливості;
- визначте середньоквартальний обсяг капіталу;
- вчисліть ряд динаміки похідного показники – прибутковості капіталу;
- для кожного ряду обчисліть базисні та ланцюгові темпи приросту, поясніть їх взаємозв'язок.

Таблиця 7.2

Показник, млн гр. од	Минулий рік, квартал				Поточний рік, I кв.
	I	II	III	IV	
Капітал на початок кварталу	384	403	615	776	1210
Прибуток за квартал	185	218	242	306	344

Розв'язок:

а) Капітал на початок кварталу – моментний динамічний ряд, так як показує стан на визначений момент часу (на початок кварталу).

Прибуток за квартал – інтервальний ряд, так як показує результат за проміжок часу (квартал).

б) Середньоквартальний обсяг капіталу визначаємо за формулою середньої хронологічної (так як ряд є моментним):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2} + x_2 + \dots + x_{n-1};$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{384 + 1210}{2} + 403 + 615 + 776}{4} = 647,75 \text{ млн гр. од.}$$

в) Прибутковість капіталу = $\frac{\text{прибуток}}{\text{капітал}} 100\%$.

Показник	Минулий рік, квартал			
	I	II	III	IV
Прибутковість, %	$\frac{185}{\frac{384 + 403}{2}} 100\%$	$\frac{218}{\frac{403 + 615}{2}} 100\%$	$\frac{242}{\frac{615 + 776}{2}} 100\%$	$\frac{306}{\frac{776 + 1210}{2}} 100\%$

г) Базисні та ланцюгові темпи приросту:

Капітал на початок року

Показник	Минулий рік, квартал				Поточний рік, I кв.
	I	II	III	IV	
Базисний	1	403:384=1,05	615:384=1,60	776:384=2,02	1210:384=3,15
Ланцюговий	1	403:384=1,05	615:403=1,52	776:615=1,26	1210:776=1,56

Прибуток

Показник	Минулий рік, квартал				Поточний рік, I кв.
	I	II	III	IV	
Базисний	1	218:185=1,18	242:185=1,30	306:185=1,65	344:185=1,86
Ланцюговий	1	218:185=1,18	242:218=1,11	306:242=1,26	344:306=1,12

Прибутковість

$$Pr_1 = 48$$

$$Pr_2 = 43$$

$$Pr_3 = 35$$

$$Pr_4 = 31$$

Показник	Минулий рік, квартал			
	I	II	III	IV
Базисний	1	43:48=0,89	35:48=0,73	31:48=0,65
Ланцюговий	1	43:48=0,89	35:43=0,81	31:35=0,88

Висновок: добуток ланцюгових темпів зростання за рік дорівнює базисному за той же період.

7.3. Прямі іноземні інвестиції в розвиток металургії склали, млн дол. США:

Таблиця 7.3

Рік	Чорна металургія	Кольорова металургія
1996	7,5	10,0
1997	12,3	14,2
1998	24,3	26,8

Для кожної галузі визначте базисні та ланцюгові абсолютні прирости, оцініть прискорення процесу інвестування металургії.

Розв'язок:

ланцюгові абсолютні прирости:

– чорна металургія:

$$\Delta y_1 = 12,3 - 7,5 = 4,8;$$

$$\Delta y_2 = 24,3 - 12,3 = 12;$$

– кольорова металургія:

$$\Delta y_1 = 14,2 - 10,0 = 4,2;$$

$$\Delta y_2 = 26,8 - 14,2 = 12,6;$$

базисні абсолютні прирости:

– чорна металургія:

$$\Delta y = 24,3 - 7,5 = 16,8;$$

– кольорова металургія:

$$\Delta y = 26,8 - 10 = 16,8$$

абсолютне прискорення: $\Delta^c = \Delta y_t - \Delta y_{(t-1)}$

– чорна металургія:

$$\Delta^{\circ} = 12 - 4,8 = 7,2;$$

– кольорова металургія:

$$\Delta^{\circ} = 12,6 - 4,2 = 8,4$$

Інвестування кольорової металургії випереджує інвестування чорної металургії.

7.4. Динаміка обсягів перекачування палива трубопровідним транс-портом характеризується такими даними, млн т.

Таблиця 7.4

Рік	2000	2005	2009
Природний газ	160	176	186
Нафта та нафтопродукти	120	128	130

Для кожного виду пального визначить:

- середньорічні абсолютні прирости обсягів перекачки за 2001-2005 та 2006-2009 рр.;
- відносне прискорення нарощування обсягів вантажів.

Розв'язок:

- середньорічні прирости за 2001-2005 роки:

$$\bar{\Delta}_G = \frac{176 - 160}{5} = 3,2;$$

$$\bar{\Delta}_H = \frac{128 - 120}{5} = 1,6.$$

Середньорічні прирости за 2006-2009 роки:

$$\bar{\Delta}_G = \frac{186 - 176}{4} = 2,5;$$

$$\bar{\Delta}_H = \frac{130 - 128}{4} = 0,5.$$

- відносне прискорення: $T_t = \frac{\Delta_t}{y_{t-1}}$

газ за 2001-2005 роки:

$$T_t = \frac{3,2}{160} = 0,02;$$

нафта за 2001-2005 роки:

$$T_t = \frac{1,6}{120} = 0,0133;$$

газ за 2006-2009 роки:

$$T_t = \frac{2,5}{176} = 0,0142 < 0,02, \text{ тобто йде уповільнення};$$

нафта за 2006-2009 роки:

$$T_t = \frac{0,5}{128} = 0,00391 < 0,0133, \text{ також спостерігається уповільнення.}$$

7.5. Зімкніть динамічний ряд, обчисліть базисні абсолютні прирости, поясніть їх зміст.

Таблиця 7.5

Показник, млн гр. од.	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Вартість обладнання: середньорічна	220	245	280	320	339	365	421
На кінець року	253	281,75	322	368	390	420	484

Розв'язок:

Абсолютні базисні прирости:

$$\Delta y_1 = 253 - 220 = 33;$$

$$\Delta y_5 = 390 - 339 = 51;$$

$$\Delta y_2 = 282 - 245 = 37;$$

$$\Delta y_6 = 420 - 365 = 55;$$

$$\Delta y_3 = 322 - 280 = 42;$$

$$\Delta y_7 = 484 - 421 = 63.$$

$$\Delta y_4 = 368 - 320 = 48;$$

Вартість виробничого устаткування на кінець року збільшується.

7.6. Використовуючи зв'язок характеристик динаміки, визначте обсяги перевезень вантажів автотранспортом, абсолютну та відносну швидкість росту цих обсягів.

Таблиця 7.6

Ланцюгові характеристики динаміки					
Рік	Перевезено вантажів, млн т	Абсолютний приріст, млн т	Темп росту, k_t	Темп приросту, %	Абсолютне знач. 1% приросту, млн т
2001	300	X	X	X	X
2002	320	20	1,067	6,7	3,0
2003	336	16	1,050	5,0	3,2
2004	360	24	1,071	7,1	3,36
2005	372	12	1,033	3,3	3,6

Розв'язок:

Середня абсолютна швидкість росту перевезень вантажів: $\bar{\Delta} = \frac{\sum_{t=1}^n \Delta_t}{n}$.

$$\bar{\Delta} = \frac{20+16+24+12}{4} = 18 \text{ млн т.}$$

Щорічно обсяг перевезень у середньому зростає на 18 млн т.

Темп зростання ланцюговий $k_{2002-2001} = y_{2002}/y_{2001} = 320/300 = 1,067$.

Середній темп зростання перевезень вантажів:

$$\bar{k} = \sqrt[n]{k_1 k_2 \dots k_n}.$$

$$\bar{k} = \sqrt[4]{1,067 \cdot 1,05 \cdot 1,07 \cdot 1,03} = 1,05; \text{ обсяги перевезень зростають у середньому на 5\% щорічно.}$$

7.7. Динаміка заборгованості промислових підприємств регіону за короткостроковими кредитами, млн грн. од.

Таблиця 7.7

Галузь промисловості	Заборгованість 01.01	Абсолютне збільшення заборгованості за місяць		
		Січень	Лютий	Березень
A	320	48	60	84
B	510	184	118	106
C	170	18	9	7

Для кожної галузі визначте: а) абсолютний приріст заборгованості за I квартал і розмір заборгованості станом на 1 квітня; б) темп приросту заборгованості за I квартал.

Розв'язок:

а) абсолютний приріст заборгованості та заборгованість на 1.04 за галузями:

A) абсолютний приріст заборгованості за I квартал = 48 + 60 + 84 = 192.

Заборгованість на 1.04 = 192 + 320 = 512.

B) абсолютний приріст заборгованості за I квартал = 184 + 118 + 106 = 408.

Заборгованість на 1.04 = 510 + 408 = 918.

C) абсолютний приріст заборгованості за I квартал = 18 + 9 + 7 = 34.

Заборгованість на 1.04 = 170 + 34 = 204.

б) темп приросту заборгованості за I квартал за галузями:

$$T_t = (k_t - 1) \cdot 100 \% = (y_t / y_{t-1} - 1) \cdot 100 \%$$

A) $T_t = (512/320 - 1) \cdot 100\% = 60 \%$, тобто приріст заборгованості за I квартал для галузі А складає 60 %.

Аналогічно для галузей В та С – їх темп приросту заборгованості складає 80 % та 20 % відповідно.

Для галузі А помісячний темп приросту склав:

– у лютому $T_t = (y_t / y_{t-1} - 1) \cdot 100 \% = (60/48 - 1) \cdot 100 \% = 25 \%$,

– у березні $T_t = (84/60 - 1) \cdot 100 \% = 40 \%$ – простежується для галузі А збільшення помісячного темпу приросту заборгованості.

Для галузі В помісячний темп приросту склав:

– у лютому $T_t = (y_t / y_{t-1} - 1) \cdot 100 \% = (118/184 - 1) \cdot 100 \% = -36 \%$,

– у березні $T_t = (106/118 - 1) \cdot 100 \% = -10 \%$ – простежується для галузі В зменшення помісячного темпу приросту заборгованості.

Для галузі С помісячний темп приросту склав:

– у лютому $T_t = (y_t / y_{t-1} - 1) \cdot 100\% = (9/18 - 1) \cdot 100\% = -50 \%$,

– у березні $T_t = (7/9 - 1) \cdot 100\% = -22\%$ – простежується для галузі С зменшення помісячного темпу приросту заборгованості.

7.8. Динаміка виробництва товарів легкої промисловості характеризується такими даними:

Таблиця 7.8

Вид товару	Виробництво в 2004 р.	Щорічне абсолютне зниження виробництва	
		2005	2006
Тканина	240	-28	-20
Трикотаж	150	-9	-6
Взуття	80	-12	-8

Для кожного товару визначте: а) абсолютне зниження виробництва за 2005-2006 роки; б) рівень виробництва в 2006 році; в) темпи зниження виробництва в 2006 році, порівняно з 2004 роком.

Розв'язок:

А) абсолютне зниження за 2005-2006 роки:

$$\text{тканини } \Delta y = -28 - 20 = -48,$$

$$\text{трикотаж } \Delta y = -9 - 6 = -15,$$

$$\text{взуття } \Delta y = -12 - 8 = -20.$$

Б) рівень виробництва в 2006 році $y_t = y_{t-1} + \Delta y$:

$$\text{тканини } y_t = 240 - 28 - 20 = 192,$$

$$\text{трикотаж } y_t = 150 - 9 - 6 = 135,$$

$$\text{взуття } y_t = 80 - 12 - 8 = 60.$$

В) темпи зниження виробництва в 2006 році порівняно з 2004 роком $k_t = y_t / y_0$:

$$\text{тканини } k_t = 192/240 = 0,8,$$

$$\text{трикотаж } k_t = 141/150 = 0,9,$$

$$\text{взуття } k_t = 60/80 = 0,75.$$

7.9. Динаміка витрат населення характеризується такими даними:

Таблиця 7.9

Витрати	Обсяг витрат у 2007 р., Q_7	Темп росту до попереднього року, %	
		2008	2009
На товари	82,5	122	107,5
На послуги	17,2	125	116,0

Для кожної групи витрат визначте:

а) темп зростання обсягу витрат за 2008-2009 рр.;

б) обсяг витрат в 2009 р.;

в) середньорічний абсолютний приріст обсягу витрат.

Розв'язок:

а) темп зростання обсягу витрат за 2008-2009 рр. $T_{7-9} = T_{7-8} \cdot T_{8-9}$:

– на товари: $T = 1,22 \cdot 1,075 = 1,31$, темп приросту складає 31 %;

– на послуги: $T = 1,25 \cdot 1,16 = 1,45$ темп приросту складає 45 %.

б) обсяг витрат в 2009 р. $Q_{7-9} = Q_7 \cdot T_{7-9}$:

– на товари: $Q = 82,5 \cdot 1,22 \cdot 1,075 = 108,2$ млн гр. од.

– на послуги: $Q = 17,2 \cdot 1,25 \cdot 1,16 = 24,9$ млн гр. од.

в) середньорічний абсолютний приріст обсягу витрат:

– на товари:

$$\bar{\Delta}_o = \frac{18,15 + 7,55}{2} = 12,85.$$

– на послуги:

$$\bar{\Delta}_i = \frac{4,3 + 3,44}{2} = 3,87.$$

7.10. За даними обстежень домогосподарств, у минулому році їх доходи виросли на 15 %. Приріст витрат склав: на їжу – 6,3 %; на одяг, тканини, взуття – 11,1 %; на меблі та товари культурно-побутового призначення – 20,7 %. Для кожного виду витрат визначте коефіцієнти еластичності від доходу, поясність їх зміст, проаналізуйте.

Розв'язок:

1) їжа: $k_{ел.} = T_y / T_x = 6,3/15 = 0,42$, тобто зі зростанням доходів на 1% витрати на їжу зростають на 0,42% (еластичність є середньою).

2) одяг: $k_{ел.} = T_y / T_x = 11,1/15 = 0,74 \%$, тобто зі зростанням доходів на 1% витрати на одяг зростають на 0,74% (еластичність є вищою ніж в першому випадку).

3) меблі: $k_{ел.} = T_y / T_x = 20,7/15 = 1,38 \%$, тобто зі зростанням доходів на 1% витрати на меблі зростають на 1,38% (еластичність є дуже високою).

7.11. Динаміка цін та обсягів продаж електропобутових товарів за минулий рік характеризується такими даними:

Таблиця 7.11

Вид товару	Коефіцієнт росту (зниження)	
	Цін	Обсягів продаж
А	1,25	0,70
В	1,10	0,90
С	1,20	0,84

Для кожного виду товару визначте коефіцієнти цінової еластичності продаж, поясніть їх значення, проаналізуйте.

Розв'язок:

Таблиця

Темпи приросту цін та обсягів продажів

Вид товару	Темп приросту (зниження), %	
	Цін, T_x	Обсягів продаж, T_y
А	25	- 30
В	10	- 10
С	20	- 16

Коефіцієнти цінової еластичності продаж:

А) $k_{ел.} = T_y / T_x = -30/25 = -1,2 \%$, при зростанні цін на 1 %, обсяги продаж спадають на 1,2% (висока зворотна еластичність);

В) $k_{ел.} = T_y / T_x = -10/10 = -1 \%$, тобто при зростанні цін на 1 %, обсяги продаж спадають також на 1 % (цінова еластичність на товар В нижча ніж на товар А).

С) $k_{ел.} = T_y / T_x = -16/20 = -0,8 \%$, обсяги продаж спадають на 0,8 % при зростанні цін на товар С на 1 % (цінова еластичність на товар С найменша з трьох товарів).

7.12. Динаміка виробництва та експорту товарів за минулий рік характеризується даними

Таблиця 7.12

Група товарів	Темп росту, %	
	виробництва	експорту
Харчова сировина та продукти	109,2	103,5
Хімічні продукти	117,4	112,7
Метали та металопродукти	122,6	144,7
Промислове обладнання	114,8	107,7

Для кожної групи товарів визначте коефіцієнт еластичності експорту від обсягів виробництва, поясніть їх зміст, проаналізуйте.

Розв'язок:

Таблиця

Темпи приросту виробництва та експорту

Група товарів	Темп приросту, %		Коефіцієнт еластичності, %
	виробництва	експорту	
Харчова сировина та продукти	9,2	3,5	0,38
Хімічні продукти	7,4	2,7	0,36
Метали та металопродукти	2,6	4,7	0,18
Промислове обладнання	4,8	7,7	1,6

Коефіцієнт еластичності показує на скільки збільшиться експорт зі зростанням виробництва на 1 %. Таким чином, зростання виробництва призведе до найбільшого зростання у групі промислового обладнання, а найменше це відіб'ється на групі металів та металопродуктів.

7.13. Динаміка імпорту нафтопродуктів у регіон характеризується такими даними:

Таблиця 7.13

Рік	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
-----	------	------	------	------	------	------	------

Імпорт, тис. т	32	36	39	43	48	53	57
----------------	----	----	----	----	----	----	----

Виходячи з цих даних:

- опішіть тенденцію росту імпорту нафтопродуктів за допомогою лінійного тренду, поясніть значення параметрів трендового рівняння;
- припускаючи, що виявлена тенденція збережеться, визначте очікувані обсяги імпорту в наступному році;
- з ймовірністю 0,95 визначте довірчі межі прогнозного рівня на наступний рік.

Розв'язок:

Таблиця

Допоміжна таблиця

Рік	Імпорт, тис. т y_t	t	$t y_t$	Y_t	$y_t - Y_t$	$(y_t - Y_t)^2$
2001	32	-3	-96	31,4	0,6	0,36
2002	36	-2	-72	35,6	0,4	0,16
2003	39	-1	-39	39,8	-0,8	0,64
2004	43	0	0	44	-1	1
2005	48	1	48	48,2	-0,2	0,04
2006	53	2	106	52,4	0,6	0,36
2007	57	3	171	56,6	0,4	0,16
Разом	308	0	118			2,72

- Рівняння тренду має вигляд $Y_t = a + bt$,

$$\text{де } a = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n} = 308 / 7 = 44, \quad b = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot y_t}{\sum_{t=1}^n t^2} = \frac{118}{28} = 4,2.$$

Таким чином, $Y_t = 44 + 4,2t$, тобто середній рівень імпорту складав 44 тис. т. і щорічно зростав у середньому на 4,2 тис. т.

- очікувані обсяги імпорту в наступному році $Y_4 = 44 + 4,2 \cdot 4 = 60,8$ тис. т.

Це точкова оцінка прогнозу.

- розрахуємо інтервальну оцінку прогнозу, тобто довірчі межі, що розраховуються з певною ймовірністю $Y_{t+v} = \pm t_{0,95} s_p$, де s_p – похибка прогнозу; $t_{0,95}$ – довірче число для прийнятого рівня ймовірності; v – період прогнозу.

Похибка прогнозу s_p розраховується за формулою:

$$s_p = s_e \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{3(n+2v-1)^2}{n(n^2-1)}},$$

де $s_e^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - Y_t)^2}{n - m}$ – оцінка залишкової дисперсії, $m = 2$ – число параметрів функції, $n = 7$ – кількість спостережень.

За даними таблиці $s_e^2 = 2,72 / (7 - 2) = 0,544$, $s_e = 0,74$.

$$\sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{3(n+2v-1)^2}{n(n^2-1)}} = \sqrt{\frac{7+1}{7} + \frac{3(7+2 \cdot 1-1)^2}{7(7^2-1)}} = 1,31.$$

Критичне значення двостороннього $t_{0,95}$ -критерію для $\alpha = 0,05$ та числа ступенів свободи $(n - 2) = 7 - 2 = 5$ становить $t_{0,95}(5) = 2,02$.

Таким чином, $t_{0,95} \cdot s_p = 2,02 \cdot 0,74 \cdot 1,31 = 1,96$, а довірчі межі прогнозного рівня складають: $60,8 \pm 1,96$.

7.14. Динаміка виробництва обчислювальних і керуючих комплексів характеризується даними:

Таблиця 7.14

Рік	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Кількість комплексів	36	44	51	62	70	79	85

- на основі аналізу приростів обґрунтуйте функціональний вид трендового рівняння;
- обчисліть параметри трендового рівняння, поясніть їх зміст;

в) припускаючи, що виявлена тенденція збережеться, визначте очікуваний рівень виробництва у 2007 та 2008 рр.;

г) з імовірністю 0,95 визначте довірчі межі прогнозного рівня.

Розв'язок:

а) Як відомо, вибір функціонального виду трендового рівняння залежить від характеру ряду динаміки. Для того, щоб його визначити, знайдемо абсолютні прирости: вони дорівнюють відповідно 8, 7, 11, 8, 9 та 6. Отже, як бачимо, абсолютні прирости відносно стабільні, тому доцільно використовувати лінійний тренд $Y_t = \alpha + bt$.

б) обчислимо параметри трендового рівняння у таблиці.

Таблиця

Допоміжна таблиця

Рік, t	Кількість, y_t	t	$t y_t$	Y_t	$y_t - Y_t$	$(y_t - Y_t)^2$
2000	36	-3	-108	35,8	0,2	0,04
2001	44	-2	-88	44,2	-0,2	0,04
2002	51	-1	-51	52,6	-1,6	2,56
2003	62	0	0	61	1	1
2004	70	1	70	69,4	0,6	0,36
2005	79	2	158	77,8	1,2	1,44
2006	85	3	255	86,2	-1,2	1,44
Разом	427	0	236	427	X	6,88

$$\alpha = \sum_1^n \frac{y_t}{n} = \frac{427}{7} = 61; \quad b = \frac{\sum_1^n t \cdot y_t}{\sum_1^n t^2} = \frac{236}{28} = 8,4.$$

Отже, $Y_t = 61 + 8,4t$, тобто середня кількість обчислювальних і керуючих комплексів, вироблених за 2000-2006 роки, становить 61. Щорічно виробництво обчислювальних і керуючих комплексів зростає в середньому на 8,4.

в) За умови, що комплекс причин, який формує тенденцію, ближ-чим часом не зміниться, можна продовжити тенденцію за межі динамічного ряду (екстраполювати тренд). Очікуваний рівень виробництва у 2007, 2008 роках становить:

$$Y_{2007} = 61 + 8,4 \cdot 4 = 94,6.$$

$$Y_{2008} = 61 + 8,4 \cdot 5 = 103.$$

Це точкова оцінка прогнозу.

г) Розрахуємо інтервальну оцінку прогнозу, тобто довірчі межі, що розраховуються з певною ймовірністю $Y_{t+v} = \pm t_{0,95} s_p$, де s_p – похибка прогнозу; $t_{0,95}$ – довірче число для прийнятого рівня ймовірності; v – період упередження.

Похибка прогнозу s_p розраховується за формулою:

$$s_p = s_e \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{3(n+2v-1)^2}{n(n^2-1)}}, \quad \text{де } s_e^2 = \frac{\sum_1^n (y_t - Y_t)^2}{n}.$$

$$\text{За даними таблиці } s_e^2 = \frac{6,88}{7} = 0,98, \quad s_e = 0,99.$$

Підкореневий вираз дорівнює $\sqrt{\frac{7+1}{7} + \frac{3(7+2 \cdot 1-1)^2}{7(7^2-1)}} = 1,3$. Критичне значення двостороннього t -критерію

для $\alpha = 0,05$ та числа ступенів свободи $(n-2) = 7-2 = 5$ становить $t_{0,95}(5) = 2,02$.

Таким чином,

$$t_{0,95} \cdot s_p = 2,02 \cdot 0,99 \cdot 1,3 = 2,59 \approx 2,6.$$

Отже, довірчі межі прогнозних рівнів дорівнюють: $94,6 \pm 2,6$ та $103 \pm 2,6$.

7.15. Динаміка урожайності соняшника характеризується даними:

Таблиця 7.15

Рік	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Ц/га	15,2	14,8	15,9	16,5	17,0	16,7	17,3

а) опишіть тенденцію урожайності лінійним трендом, поясніть зміст параметрів трендового рівняння;

б) визначте теоретичні рівні урожайності та середнє квадратичне відхилення від тренду.

Розв'язок:

а) обчислимо параметри трендового рівняння у таблиці:

Таблиця

Допоміжна таблиця

Рік	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	Σ
Ц/га	15,2	14,8	15,9	16,5	17,0	16,7	17,3	113,4
t	-3	-2	-1	0	1	2	3	0
t·y _t	-45,6	-29,6	-15,9	0	17	33,4	51,9	11,2
Y _t	15	15,4	15,8	16,2	16,6	17	17,4	113,4
y _t - Y _t	0,2	-0,6	0,1	0,3	0,4	-0,3	-0,1	0
(y _t - Y _t) ²	0,04	0,36	0,01	0,09	0,16	0,09	0,01	0,76

Рівняння тренду має вигляд $Y_t = a + bt$, де

$$a = \frac{\sum_1^n y_t}{n} = \frac{113}{7} = 16,2, \quad b = \frac{\sum_1^n t \cdot y_t}{\sum_1^n t^2} = \frac{11,2}{28} = 0,4.$$

Таким чином, $Y_t = 16,2 + 0,4t$. Таким чином, середній рівень урожайності соняшника за 2000-2006 роки становив 16,2 ц/га. Щорічно урожайність зростає в середньому на 0,4 ц/га. За цим рівнянням знаходимо теоретичні рівні урожайності Y_t .

б) середнє квадратичне відхилення дорівнює: $s_e^2 = \frac{\sum_1^n (y_t - Y_t)^2}{n - m} = 0,76 / (7 - 2) = 0,152, \quad s_e = 0,39.$

7.16. Динаміка норми капіталовкладень характеризується даними:

Таблиця 7.16

Рік	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Норма капіталовкладень, %	24,1	19,0	22,2	26,7	25,9	27,2	24,0	27,6	25,3

Проведіть згладжування ряду динаміки методом тричленної плинної середньої, зробіть висновок про тенденцію норми капіталовкладень.

Розв'язок:

Розрахуємо тричленну плинну середню в допоміжній таблиці за формулою $y_{ts} = (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/3$.

Таблиця

Допоміжна таблиця

Рік	Трирічне значення, $y_{t-1} + y_t + y_{t+1}$	Плинна середня, y_{ts}
2001	X	X
2002	24,1+19,0+22,2 = 65,3	65,3/3 = 21,8
2003	19,0+22,2+26,7 = 67,9	67,9/3 = 22,6
2004	74,8	24,9
2005	79,8	26,6
2006	77,1	25,7
2007	78,8	26,3
2008	76,9	25,6
2009	X	X

Норма капіталовкладення має тенденцію до зростання протягом перших 5 років, потім тенденція до зростання не простежується.

7.17. Динаміка врожайності плодово-ягідних культур та виноградників в області характеризується такими даними:

Таблиця 7.17

Рік	Врожайність, ц /га		Рік	Врожайність, ц /га	
	Плоди та ягоди	Виноград		Плоди та ягоди	Виноград
1999	43,1	49,3	2005	35,8	54,4
2000	34,6	52,2	2006	40,2	56,3
2001	29,8	44,7	2007	35,6	54,0
2002	37,2	30,9	2008	32,3	46,2
2003	45,9	56,0	2009	37,8	52,9
2004	27,4	48,5			

Проведіть згладжування рядів динаміки методом тричленної плин-ної середньої. Зробіть висновки щодо тенденції врожаю.

Розв'язок:

Розрахуємо тричленну плинну середню в допоміжній таблиці за формулою $y_{ts} = (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/3$.

Таблиця

Рік	Врожайність, ц /га, y_t		Трирічне значення, $y_{t-1} + y_t + y_{t+1}$		Плинна середня, y_{ts}	
	Плоди, ягоди	Виноград	Плоди, ягоди	Виноград	Плоди, ягоди	Виноград
1999	43,1	49,3	X	X	X	X
2000	34,6	52,2	107,5	146,2	35,8	48,7
2001	29,8	44,7	101,6	127,8	40,2	42,6
2002	37,2	30,9	112,9	131,6	37,6	43,8
2003	45,9	56,0	110,5	135,4	30,4	45,0
2004	27,4	48,5	110,1	158,9	36,7	53,0
2005	35,8	54,4	103,4	159,2	34,5	53,0
2006	40,2	56,3	111,6	164,7	37,2	54,9
2007	35,6	54,0	108,1	156,5	36,0	52,5
2008	32,3	46,2	105,7	153,1	35,2	51,0
2009	37,8	52,9	X	X	X	X

Тенденція врожайності плодів та ягід не є чіткою, а тенденція врожайності винограду є зростаючою, починаючи з 2001 року.

7.18. У 1987-1999 рр. коефіцієнти оновлення та вибуття основних виробничих фондів у промисловості регіону склали, %:

Таблиця 7.18

Рік	Коефіцієнт		Рік	Коефіцієнт	
	Оновлення	Вибуття		Оновлення	Вибуття
1997	7,4	1,8	2004	7,2	2,5
1998	7,2	2,0	2005	6,5	2,6
1999	6,9	1,9	2006	6,8	2,8
2000	7,0	2,1	2007	7,0	2,7
2001	6,8	2,2	2008	6,0	2,4
2002	6,7	1,8	2009	6,3	2,6
2003	6,9	2,3			

Проведіть згладжування рядів методом п'ятичленної плинної середньої. Зробіть висновки щодо тенденції оновлення та вибуття основних виробничих фондів.

Розв'язок:

Розрахуємо п'ятичленну плинну середню в допоміжній таблиці за формулою $y_{ts} = (y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})/5$.

Таблиця

Допоміжна таблиця

Рік	Коефіцієнт, y_t		П'ятирічне значення коефіцієнту		Згладжене значення коефіцієнту, y_{ts}	
	Оновлення	Вибуття	Оновлення	Вибуття	Оновлення	Вибуття
1987	7,4	1,8	X	X	X	X
1988	7,2	2,0	X	X	X	X
1989	6,9	1,9	35,3	10,0	7,06	2,00
2000	7,0	2,1	34,6	10,0	6,92	2,00

2001	6,8	2,2	34,3	10,3	6,86	2,06
2002	6,7	1,8	34,6	10,9	6,92	2,18
2003	6,9	2,3	34,1	11,4	6,82	2,28
2004	7,2	2,5	34,1	12,0	6,82	2,40
2005	6,5	2,6	34,4	12,9	6,88	2,58
2006	6,8	2,8	33,5	13,0	6,70	2,60
2007	7,0	2,7	32,6	13,1	6,52	2,62
2008	6,0	2,4	X	X	X	X
2009	6,3	2,6	X	X	X	X

Коефіцієнт оновлення має тенденцію до зниження, коефіцієнт вибуття – до зростання.

7.19. Середньодобове споживання електроенергії характеризується такими даними, тис. кВт-год:

Таблиця 7.19

Січень	16,7	Липень	8,4
Лютий	14,1	Серпень	9,8
Березень	13,4	Вересень	10,9
Квітень	9,7	Жовтень	12,2
Травень	8,2	Листопад	15,8
Червень	7,5	Грудень	17,3
		Середнє за рік, y_s	12,0

Визначте індекси сезонності на основі постійної середньої, вчисліть амплітуду коливань.

Розв'язок:

Розрахуємо індекс сезонності в допоміжній таблиці за формулою: $I_s = y_t/y_s$.

Таблиця

Допоміжна таблиця

Місяць	Індекс сезонності, I_s
Січень	$16,7/12 = 1,360$
Лютий	$14,1/12 = 1,175$
Березень	1,117
Квітень	0,808
Травень	0,863
червень	0,625
Липень	0,700
Серпень	0,817
Вересень	0,908
Жовтень	1,017
Листопад	1,317
Грудень	1,442

Амплітуда коливання: $R = I_s \max - I_s \min$.

$$R = 1,442 - 0,625 = 0,817.$$

7.20. За умовами контракту поставка товару оптовому покупцю повинна виконуватися однаковими партіями з інтервалом у 5 днів, фактично в минулому місяці поставлено:

Таблиця 7.20

П'ятиднівка	1	2	3	4	5	6
Поставка	126	108	184	142	108	232

Визначте середній рівень та коефіцієнт нерівномірності поставок, поясніть його зміст.

Розв'язок:

$$\text{Середній рівень: } \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{126 + 108 + 184 + 142 + 108 + 232}{6} = 150.$$

$$\text{Коефіцієнт нерівномірності: } K = \frac{y_{\max}}{\bar{y}} = \frac{232}{150} = 1,55.$$

Коефіцієнт нерівномірності використовується для характеристики закономірностей коливань у рядах динаміки з малими інтервалами часу (декада, п'ятиднівка, доба). Показує наскільки максимальне значення ряду перевищує середнє.

7.21. Обсяг реалізації товару оптовому покупцю за роками наведено у таблиці:

Таблиця 7.21

Роки	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Кіль-кість	1942	2957	2504	2194	2126	2704	3219	1745	2505	3704	3834	2513

оди- ниця												
--------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Здійснить згладжування ряду динаміки за допомогою ряду Фур'є.

Розв'язок:

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t,$$

де \hat{Y}_t – згладжений ряд динаміки (показник); t – умовний аргумент згладженості ряду динаміки; a_0, a_1, a_2 – параметри згладженого ряду динаміки.

$$a_0 = \frac{\sum_1^n y_i}{n};$$

$$a_1 = \frac{2 \sum_1^n y_i \cos t_i}{n};$$

$$a_2 = \frac{2 \sum_1^n y_i \sin t_i}{n};$$

$$t_i = \frac{2\pi(x_i - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}},$$

де x_i – «і» – а факторна ознака незгладженого ряду; x_{\min} – найменше значення факторної ознаки; x_{\max} – найбільше значення факторної ознаки.

Таблиця

Згладжування ряду динаміки за допомогою ряду Фур'є

Рік	x_i	t_i , радіан	$\cos t_i$	$\sin t_i$	$y_i \cos t_i$	$y_i \sin t_i$	\hat{Y}_t
1991	1942	0	1	0	1942,00	0	2733,03
1992	2957	$\pi/6$	0,866	0,500	2560,46	1478,5	2533,65
1993	2504	$\pi/3$	0,500	0,866	1250,00	2168,46	2370,34
1994	2194	$\pi/2$	0	1	0	2194,00	2286,84
1995	2126	$2\pi/3$	-0,500	0,866	-1063,00	1841,12	2305,56
1996	2704	$5\pi/6$	-0,866	0,500	-2341,66	1352,00	2421,45
1997	3291	π	-1	0	-3291,00	0	2603,47
1998	1745	$7\pi/6$	-0,866	-0,500	-1511,17	-872,50	2802,85
1999	2505	$4\pi/3$	-0,500	-0,866	-1252,50	-2169,33	2966,16
2000	3704	$3\pi/2$	0	-1	0	-3704,00	3049,66
2001	3834	$5\pi/3$	0,500	-0,866	1917,00	-3320,24	3030,94
2002	2513	$11\pi/6$	0,866	-0,500	2176,26	-1256,50	2915,05
Σ	32019				388,69	-2288,49	32019,00

