2.2. МАТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ГРАФІВ. МАТРИЦІ СУМІЖНОСТІ

Матриці суміжності. Матриці шляхів. Матриці досяжності. Приклади задач.

Представлення графів у вигляді рисунків зручно, але тільки тоді, коли n невелике. В алгебраїчній формі це можна зробити за допомогою матриць.

Нехай **G=(V, E)** – простий орграф, у якому вершини **V**={v_1, v_2, …, v_n} упорядковані від v_1 до v_n. Матриця **A** розміром nxn, елементи якої задаються виразом

$$a_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, \; якщо(v_i,\; v_j) \in E \\ 0, \; інакше \end{Bmatrix},$$

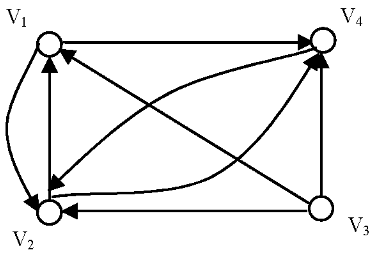
називається матрицею суміжності (МС) графа G. Оскільки $a_{ij} \in \{0, 1\}$, то матрицю **A** можна розглядати як бітову або як булеву.

Якщо два орграфи такі, що МС одного може бути отримана шляхом перестановки рядків і/або, відповідно, стовпців іншого, те ці орграфи еквівалентні.

Поняття матричного представлення можна розширити на мультиграфи і зважені графи: $a_{ij} \in \{0, w_{ij}\}$, де w_{ij} – кратність ребер, що з'єднують вершини, або вага ребра *(i, j)*.

Для простих неорієнтованих графів МС є симетричною. Якщо в графі присутні тільки ізольовані вершини без петель, то **A**=0. Якщо присутні тільки петлі, а інші елементи дорівнюють 0, то матриця суміжності є одиничною.

На рис. 2.4 наведене простий незважений орграф та його матриця суміжності **A**.



	V1	V2	V3	V4
V1	0	1	0	1
V2	1	0	0	1
V3	1	1	0	1
V4	0	1	0	0

Рис. 2.4. Приклад графа та його матриця суміжності

Розглянемо степені матриць суміжності $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, ... , $\mathbf{A}^n$, елементи яких позначимо a_{ij}^{n}. Розглянемо $\mathbf{A}^2$. Елементи такої матриці визначаються за формулою:

$$a_{ij}^{2} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * a_{kj}$$

Із формули видно, що $a_{ij}^{2} = 1$ тоді і тільки тоді, коли $a_{ik}=a_{kj}=1$, тобто у графі маються ребра (v_i, v_k) і (v_k, v_j), а це шлях довжиною $L((v_i, v_j))=2$. Тим самим, a_{ij}^{2} виявляє число шляхів із вершини v_i до вершини v_j довжиною 2. За індукцією або за допомогою рекурсії можна показати, що a_{ij}^{n} виявляє число елементарних шляхів із вершини v_i до вершини v_j довжиною n.

Якщо скласти $\mathbf{B}^n=A+A^2+A^3+ ... +A^n$, то елементи цієї матриці b_{ij}^{n} позначають, скільки існує елементарних шляхів із вершини v_i до вершини v_j і чи є вони взагалі. Якщо елемент b_{ij}^{n} не дорівнює нулю, то вершина v_j досяжна із вершини v_i.

$$p_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, \text{ якщо існує шлях з } v_i \text{ в } v_j \\ 0, \text{ інакше} \end{Bmatrix}$$

Досяжність можна визначити і більш просто. Позначимо матрицю досяжності **P**, яку ще називають шляховою матрицею графа **G**. Для її одержання можна використовувати булеві матричні операції.

$$P = A \cup A^2 \cup ... \cup A^n = \bigcup_{k=1}^{n} A^k$$

Нагадаємо, що операція диз'юнкції двох булевих матриць визначається таким чином. Нехай **A** і **B** – булеві матриці. Тоді

$$C = A \cup B \text{, де } c_{ij} = a_{ij} \cup b_{ij}$$

Розглянемо одну з практичних задач, де можна використати шляхову матрицю або матрицю досяжності. Задача нагадає колись популярну комп'ютерну гру Line, у якій uhfdtwm, зокрема, мав позначити певну кульку, що знаходиться в клітинці a_{start} на квадратній таблиці 9x9, і вказати незаняту клітинку a_{end} таблиці для переміщення туди кульки. Програма, зокрема, визначала, чи існує шлях від клітинки a_{start} до клітинки a_{end}, і вже після цього здійснювалося переміщення кульки. Тут розглянемо спрощений варіант цієї задачі. Хай таблиця має розмір 3x3 (рис. 2.5а). На початку гри вона є пустою, тому їй у відповідність можна поставити граф, що на рис. 2.5б. Після кожного кроку на незайнятому у таблиці місці (клітинці) випадковим чином з'являється нова кулька, яку гравець може перемістити на інше вільне місце в залежності від умов гри, які тут не розглядаються. Кульки можуть переміщатися тільки за горизонтальними та/або вертикальними лініями. Нехай на першому кроці кулька з'явилася на клітинці 6 та її гравець нікуди не переміщав (рис. 2.5в). На другому кроці кулька з'явилася на клітинці 3, її гравець хоче перемістити на клітинку 5 (рис. 2.5в). На рис. 2.6 наведено матриці суміжності для графів, що на рисунках 2.5б та 2.5г (для графів, що на рисунках 2.5е та 2.5ж, читач може побудувати самостійно).

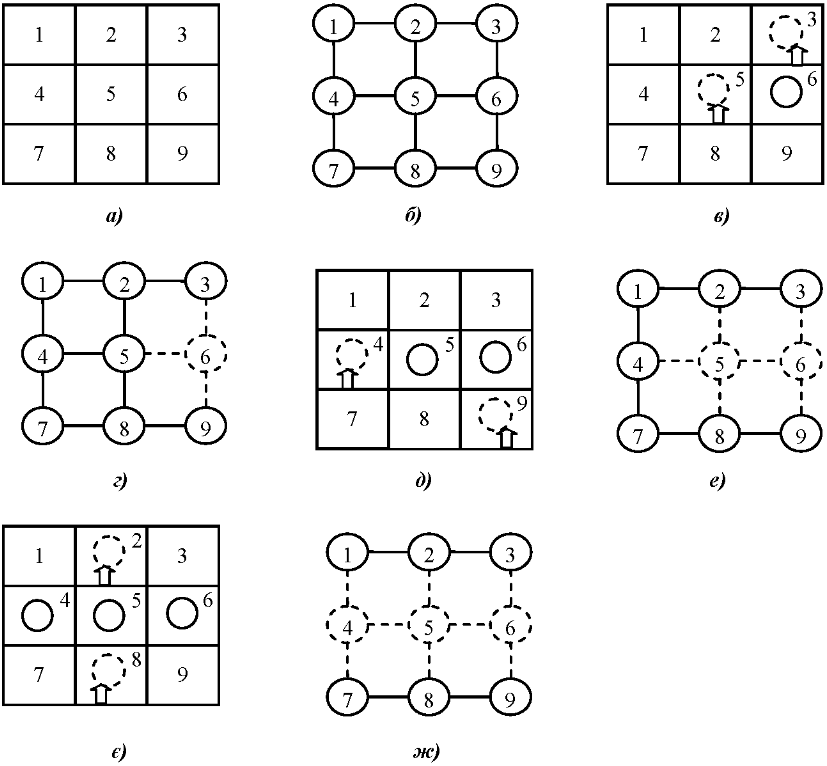


Рис. 2.5. Відображення стану таблиці графами

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1		1					
2	1		1		1				
3		1				1			
4	1				1		1		
5		1		1		1		1	
6			1		1				1
7				1				1	
8					1		1		1
9						1		1	

для графа 2.5б

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1		1					
2	1		1		1				
3		1							
4	1				1		1		
5		1		1				1	
6									
7				1				1	
8					1		1		1
9								1	

для графа 2.5г

Рис. 2.6. Матриці суміжності

Граф на рис.	**Шукані шляхи та елементи матриці**		**Шляхові матриці**								
	$v_i \to v_j$	a_{ij}^{n}	**A^1**	**A^2**	**A^3**	**A^4**	**A^5**	**A^6**	**A^7**	**A^8**	**A^9**
2.5г	3→5	a_{35}^{n}	0	1							
2.5е	9→4	a_{94}^{n}	0	0	1						
2.5ж	8→2	a_{82}^{n}	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2.7. Визначення досяжності вершини v_j із вершини v_i

На рис. 2.7 показано ідею знаходження досяжності $v_i \to v_j$ шляхом розрахунку відповідних елементів a_{ij}^{n} шляхових матриць A^n, де n – степінь матриці суміжності A. Для визначення досяжності спочатку розглядається елемент a_{ij} матриці A. Якщо $a_{ij}=1$, то існує шлях довжиною 1, а якщо $a_{ij}=0$, то обчислюється елемент a_{ij}^{n}, $n=2, 3, \ldots , N$, доки не отримаємо не нульове значення a_{ij}^{n}. Його величина позначає кількість шляхів $v_i \to v_j$ довжиною n. А якщо усі $a_{ij}^{n} = 0$, такого шляху не існує. Маршрут шляху можна отримати, виділяючи в кожному виразі $\sum a_{ik}^{n-1} * a_{kj}$, добуток, що дав ненульове значення.