РОЗДІЛ 2
НЕЛІНІЙНІ СТРУКТУРИ ДАНИХ. ГРАФИ ТА ДЕРЕВА

2.1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Визначення графа. Орієнтовані та неорієнтовані графи. Прості графи. Мультиграфи. Шлях в графі. Елементарні шляхи. Прості шляхи. Довжина шляху. Петлі й цикли в графах.

Граф **G** визначається трійкою **G(V,E,F)**, де:
V – множина вершин (точок, вузлів) графа;
E – множина ребер (дуг) графа;
F – відображення множини **E** на множину **V.**
Деякі варіанти графів представлені на рис. 2.1.

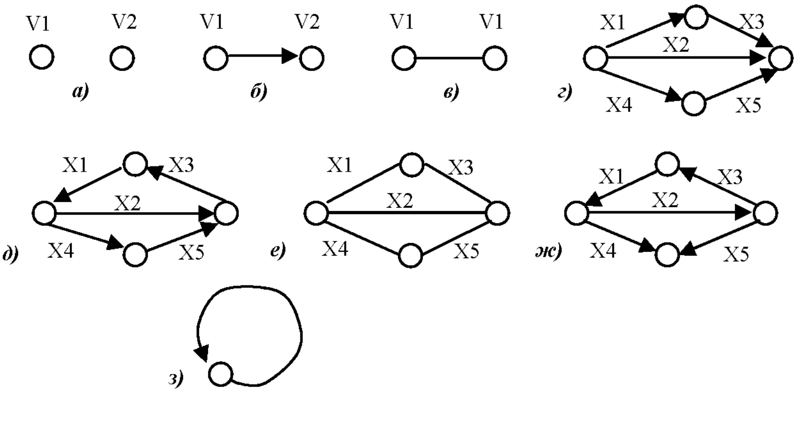

Рис. 2.1. Окремі приклади графів

Кожному ребру $x \in \mathbf{E}$ можна поставити у відповідність пару вершин (u, v), де $u,v \in \mathbf{V}$. Будь-які дві вершини, що з'єднані ребром, називаються суміжними. Ребра бувають *орієнтованими* (воно має напрямок) і *неорієнтованими*. Про будь яке ребро х, що з'єднує дві вершини v_i і v_j, у загальному випадку (чи ребро орієнтоване, чи ні) кажуть, що ребро *x інцидентно* вершинам v_i і v_j.

Граф, у якого всі ребра орієнтовані, називається *орієнтованим* або *орграфом*. Граф, у якого всі ребра не орієнтовані, називається *неорієнтованим*. Граф, у якого є як ребра з напрямком так без напрямку, називається *змішаним*. На рис. 2.1 подано: орієнтовані графи – *б, д, ж*; неорієнтовані графи – *в, е*; змішаний граф – *г*. Граф а можна розглядати як орієнтований і як неорієнтований. *Петлею* називається ребро, яке виходить з вершини і заходить в ту ж вершину (на рис. 2.1 – *з*). В цьому випадку напрямок не має значення.

Ребра можуть бути рівнобіжними. Якщо граф містить рівнобіжні ребра, він називається *мультиграфом*. Якщо ж між будь-якою парою вершин мається не більше одного ребра (для орграфа – не більш одного ребра даного напрямку), то такий граф називається *простим*. Граф, у якого кожному ребру відповідає вага, називається *зваженим* графом. Вершина графа, у якої немає жодної суміжної вершини називається *ізольованою*. Граф, що містить тільки ізольовані вершини називається *нульграфом* (цілком незв’язаним). На практиці ізольовані вершини не представляють інтересу.

Для орієнтованого графа число ребер, що виходять з деякої початкової вершини v, називається *напівступенем виходу цієї вершини*. Число ребер, що заходять до вершини, називається *напівступенем заходу вершини,* а їхня сума – повним ступенем цієї вершини.

Виходячи із визначення один і той же граф можна представити неоднозначно (див. рис. 2.2).

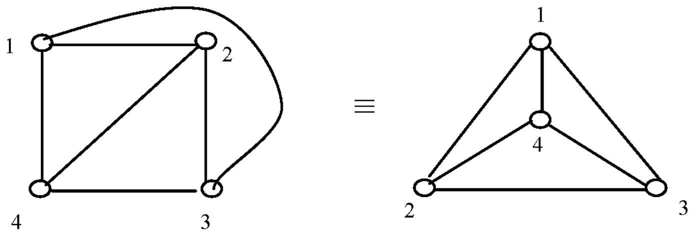

Рис. 2.2. Різне представлення одного й того ж графа

Будь-яка послідовність ребер орграфа, така що кінцева вершина будь-якого ребра є початковою вершиною наступного за ним ребра, якщо таке мається, задає *шлях* у графі.

Число ребер у послідовності, що задає деякий шлях в орграфі, називається *довжиною* цього шляху.

Шлях у графі, усі ребра якого різні, називається *простим* шляхом (простим відносно ребер).

Шлях, у якому всі вершини, через які він проходить, різні називається *елементарним* шляхом (простим відносно вершин). Всі елементарні шляхи є також і простими.

На рис. 2.3. представлено граф, у якого шляхи відповідають наведеним у табл. 2.1.

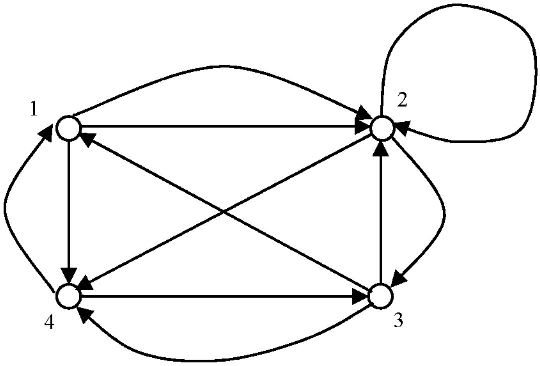

Рис. 2.3. Приклад графу, що має різні типи шляхів

Таблиця 2.1

Приклади шляхів графу на рис. 2.3

Шлях	Довжина
P1=((2,4))	L=1
P2=((2,3),(3,4))	L=2
P3=((2,1),(1,4))	L=2
P4=((2,3),(3,1),(1,4))	L=3
P5=((2,3),(3,1),(2,4))	L=3
P6=((2,2),(2,4))	L=2
P7=((2,3),(3,1),(1,2),(2,4))	L=4
P8=((2,3),(3,1),(2,3),(3,4))	L=4

Виходячи з таблиці 2.1, можна визначити типи шляхів:

P1, P2, P3, P4 – елементарні;

P5, P6, P7 – тільки прості;

P8 – непростий, тому що повторюється ребро (2, 3).

Шлях, що починається і закінчується в одній і тій же вершині, називається *циклом (контуром)*. Якщо контур проходить всього через одну вершину, то він називається *петлею* (ще одне визначення петлі).

Цикл називається *простим*, якщо відповідний йому шлях простий. Цикл називається *елементарним*, якщо він проходить через будь-яку вершину не більш одного разу. Простий орграф, що не має жодного циклу, називається *ациклічним* орграфом.