# РОЗДІЛ 2

## ПРЯМА ЛІНІЯ НА КОМПЛЕКСНОМУ КРЕСЛЕННІ. СПОСІБ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА. ПРЯМІ ОКРЕМОГО ПОЛОЖЕННЯ. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ. ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОГО КУТА

Наступним геометричним образом після точки є лінія. Розглядають її з кінематичної точки зору, тобто як сукупність усіх послідовних положень точки, що рухається. Іншими словами, лінія – це безперервний ряд точок.

Лінії можуть бути різної форми: прямі, криві плоскі і криві просторові. Розглянемо прямі лінії і їх особливості.

Отже, пряма лінія – це сукупність усіх послідовних положень точок, що прямолінійно рухаються. В нашому уявленні пряма лінія повинна бути нескінченною, тобто в будь-який момент її можна продовжити як завгодно довго.

Якщо пряма лінія не збігається з напрямком проеціювання, то її проекція є прямою лінією. У іншому випадку проецююча проекція, як говорять у геометрії, "вироджується" у точку.

## ПРЯМА ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ. СПОСІБ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

На комплексному кресленні пряма лінія може бути задана або безпосередньо своїми проекціями (рис. 20), або проекціями двох її точок (***C*** і ***D*** на рис. 21), або проекціями її відрізка (рис. 22).

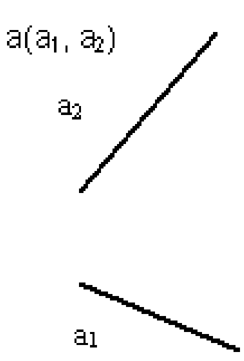



**Рис. 20**

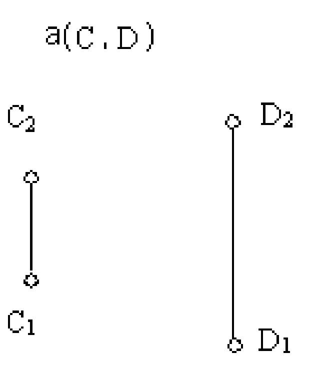



**Рис. 21**

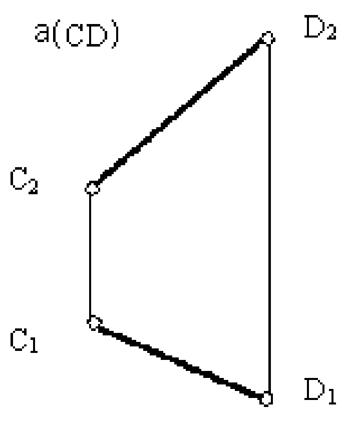
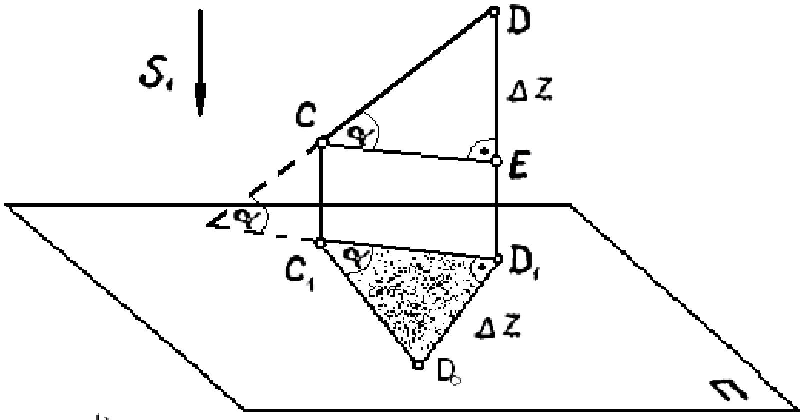



**Рис. 22**

Реконструюючи пряму лінію ***a*** (оригінал) по її зображеннях (проекціях), визначаємо, що задана пряма, представлена на рис. 20-22, не паралельна і не перпендикулярна жодній з площин проекцій **($П_1$, $П_2$, $П_3$)**. Такі прямі називаються прямими загального положення.

Уважно аналізуючи ці креслення, доходимл висновку, що проекції прямої загального положення по довжині не дорівнюють самій прямій-оригіналу. Наприклад, проекції $\boldsymbol{C_1D_1}$ і $\boldsymbol{C_2D_2}$ коротше довжини відрізка-оригіналу ***CD*** (рис. 22), тому що при проеціюванні відрізок ***CD*** знаходився під гострим кутом до площин проекцій $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$.




CE ∥ $П_1$

**Рис. 23**

Поставимо перед собою задачу: як визначити натуральну довжину відрізка ***CD*** прямої загального положення по його комплексному кресленню?

Спочатку вирішуємо задачу в наочному зображенні (рис. 23).

Проведемо з точки ***C*** пряму ***CE***$\|$$\mathbf{П_1}$. Отримаємо прямокутний трикутник ***CED.*** ∟ – знак прямого кута. Побудуємо в площині проекцій $\mathbf{П_1}$ трикутник $\boldsymbol{C_1D_1D_0}$, який дорівнює трикутникові ***CED***.

Для цього до катета $\boldsymbol{C_1D_1}$ із точки $\boldsymbol{D_1}$ побудуємо інший катет $\boldsymbol{D_1D_0}$, рівний відрізку ***DE,*** тобто перевищенню **D*Z*** одного кінця відрізка над іншим (або різниці відстаней кінців відрізка ***CD*** від площини $\mathbf{П_1}$).

Тоді гіпотенуза $\boldsymbol{C_1D_0}$ виороджується в натуральну величину ***CD***.

Звертаючись до комплексного креслення (рис. 24), зауважуємо, що всі необхідні елементи для рішення поставленої задачі тут маються.

Насправді є катет $\boldsymbol{C_1D_1}$ (горизонтальна проекція відрізка ***CD***) і відома довжина іншого катета $\boldsymbol{D_1D_0}$ (дорівнює перевищенню **D*Z*** одного кінця відрізка над іншим).

Виконавши необхідні побудови, одержуємо натуральну величину відрізка ***CD*** загального положення безпосередньо на комплексному кресленні.

Повернувшись до креслення 23, зауважуємо, що кут $\alpha$ між гіпотенузою $\boldsymbol{C_1D_0}$ і проекцією $\boldsymbol{C_1D_1}$ дорівнює кутові нахилу відрізка-оригіналу ***CD*** до площини проекцій $\mathbf{П_1}$.

Таким чином, в даній задачі одночасно була визначена натуральна і величина кута $\alpha$ нахилу відрізка прямої загального положення до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$.

Виконавши аналогічні міркування у відношенні фронтальної площини проекцій $\mathbf{П_2}$, знову визначимо ту ж саму натуральну довжину відрізка ***CD***, але тепер вже одночасно визначиться кут $\beta$ нахилу відрізка ***CD*** до фронтальної площини проекцій $\mathbf{П_2}$. Рекомендується самостійно виконати рисунок, подібний кресленню 23, узявши замість площини $\mathbf{П_1}$ площину $\mathbf{П_2}$.

Відразу звернемося до комплексного креслення (рис. 25). Прямокутний трикутник будуємо на фронтальній площині проекцій $\mathbf{П_2}$. Тут одним катетом буде проекція $\boldsymbol{C_2D_2}$, а іншим катетом – відрізок $\boldsymbol{D_2D_0}$, рівний різниці відстаней **D*y*** кінців відрізка від площини

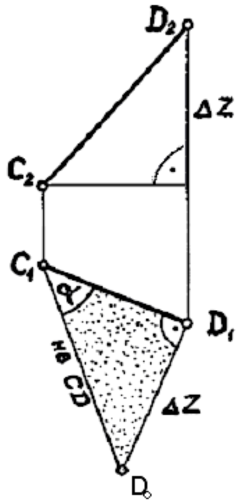



Рис. 24

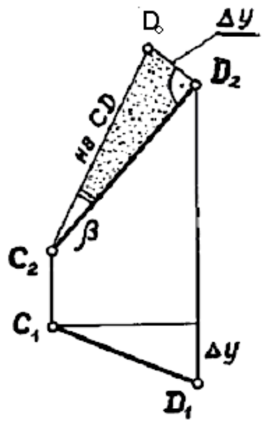



Рис. 25

проекцій $\Pi_2$.

Тоді гіпотенуза $C_2D_0$ є та ж сама натуральна довжина відрізка ***CD***, а кут β між гіпотенузою і проекцією $C_2D_2$ – натуральна величина кута β нахилу відрізка-оригіналу ***CD*** до фронтальної площини проекцій $\Pi_2$.

# ПРЯМІ ОКРЕМОГО ПОЛОЖЕННЯ

## Прямі рівня

Пряма, паралельна одній площині проекцій, називається прямою рівня, тому що всі точки такої прямої знаходяться на одному рівні стосовно відповідної площини проекцій.

На рис. 26 представлена пряма ***h***, паралельна горизонтальній площині проекцій $\Pi_1$. Ця пряма називається горизонталлю. Наочне зображення прямої супроводжується її комплексним кресленням праворуч. На горизонтальну площину проекцій $\Pi_1$ горизонталь проекціюється в натуральну величину.

На рис. 27 представлена пряма рівня ***f***, що називається фронталлю. Вона розташована паралельно фронтальній площині проекцій $\Pi_2$ і проекціюється на неї в натуральну величину.

На рис. 28 зображена пряма ***p***, паралельна профільній площині проекцій $\Pi_3$. Ця пряма називається профільною прямою рівня. На двокартинному комплексному кресленні така пряма повинна бути задана двома її точками, інакше креслення стає необоротним.

У даному випадку її точки ***M*** і ***N*** дають однозначне рішення задачі. За допомогою постійної прямої креслення $K_0$ будується профільна проекція $p_3$ прямої ***p***. Вона є

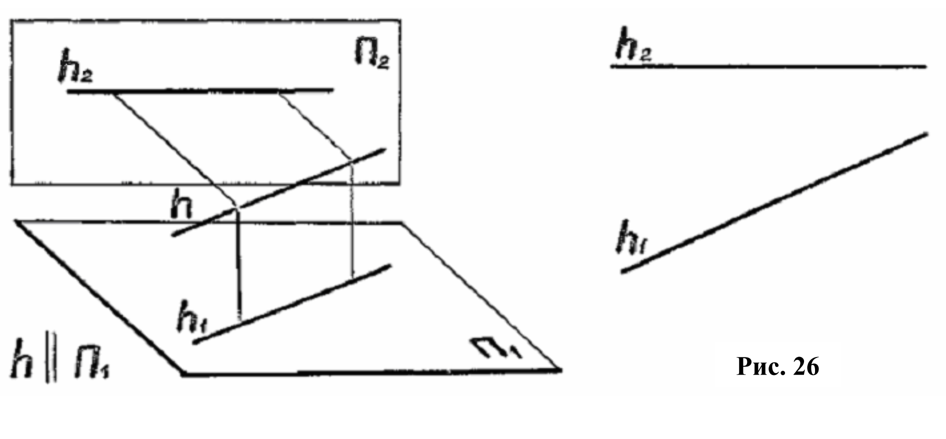
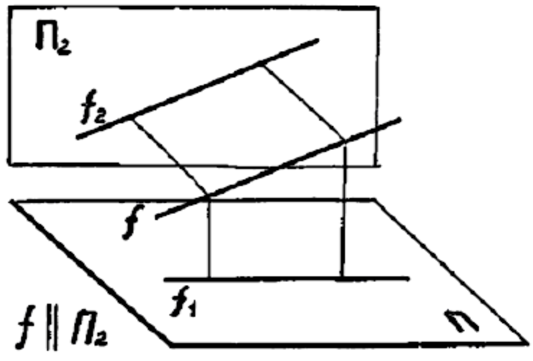



Рис. 26



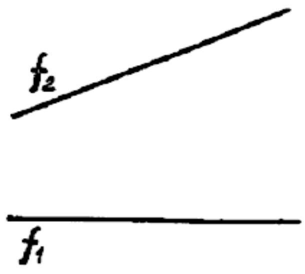




Рис. 27

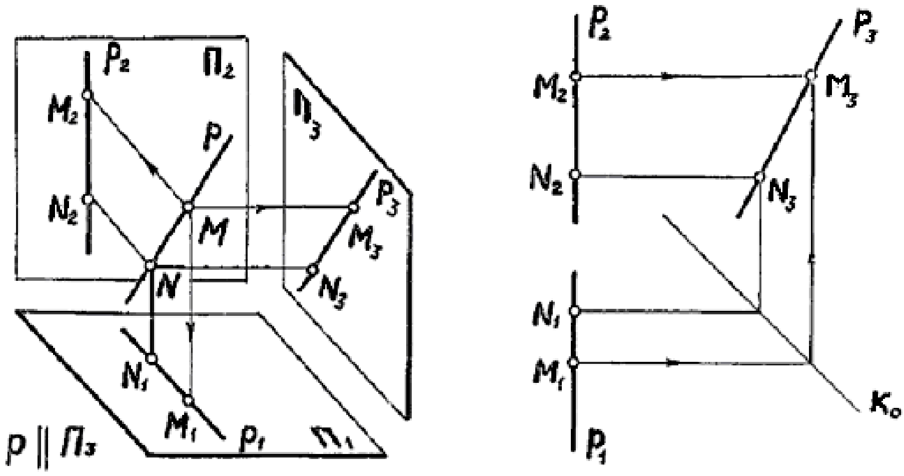



Рис. 28

натуральною величиною оригіналу.

Рекомендується самостійно вирішити питання про кути нахилу прямих рівня ***h***, ***f***, ***p*** до основних площин проекцій $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$.

Розглянуті прямі рівня: горизонталь ***h***, фронталь ***f*** і профільна пряма рівня ***p*** – є допоміжними прямими і досить часто застосовуються при рішенні різних задач нарисної геометрії.

**Проеціюючі прямі**

Пряма, перпендикулярна площині проекцій, називається проеціюючою прямою, тому

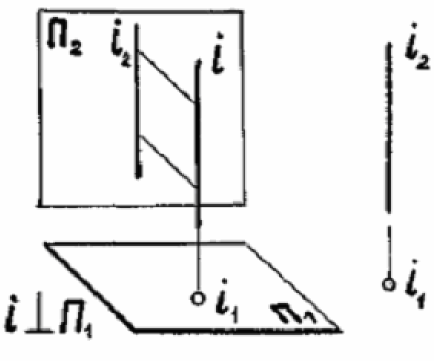



Рис. 29

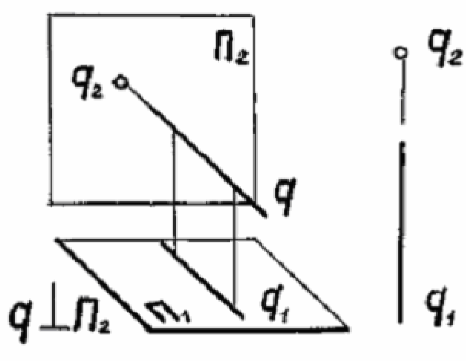
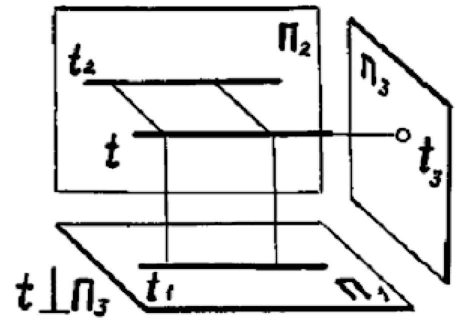



Рис. 30



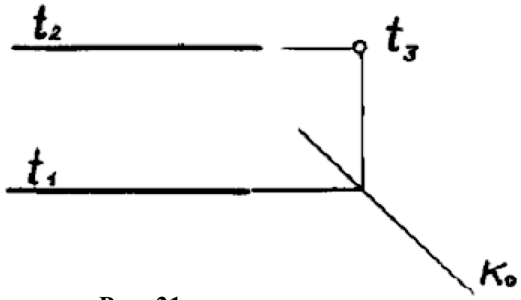




**Рис. 31**

що вона збігається з напрямком проеціювання на відповідну площину проекцій. Як згадувалося вище, одна з проекцій такої прямої “вироджується” у точку.

На рис. 29, 30, 31 представлені усі види проеціюючих прямих і називаються вони, відповідно: горизонтально-проеціююча пряма ***i*** (рис. 29), фронтально-проеціююча пряма ***q*** (рис. 30) і профільно-проеціююча пряма (рис. 31).

Особливих пояснень ці креслення не вимагають. Студент зобов’язаний навчитися не тільки проеціювати оригінали на площину, але і чітко уявляти собі по плоскому комплексному кресленню розташування оригіналу в просторі. У цьому безсумнівна запорука успіху подальшого вивчення нарисної геометрії.

Як тренування просторового мислення рекомендується самостійно розібрати нижченаведені комплексні креслення 32-38 і відповісти на наступні питання:

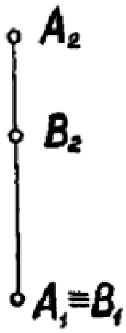



**Рис. 32**

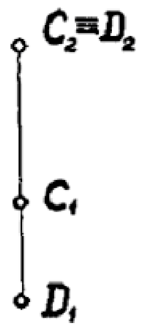



**Рис. 33**

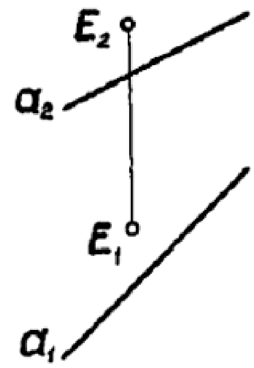



**Рис. 34**

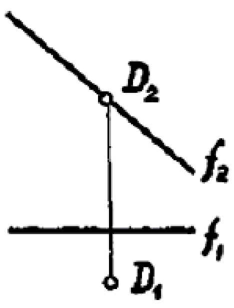



**Рис. 35**

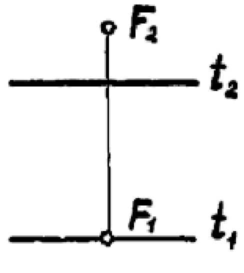



**Рис. 36**

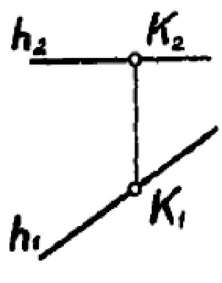



**Рис. 37**

## ПРИМІТКА

На рис. 32 і 33 знак ° означає збіг (тотожність) проекцій двох геометричних образів.

На кресленні 38 точки ***M*** і ***N*** визначають положення прямої ***p***, тобто вони задані для оборотності креслення.

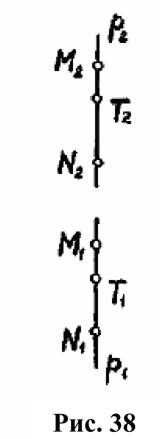



**Рис. 38**

# ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ ЛІНІЙ

Дві прямі можуть бути або рівнобіжними, або мимобіжними, або перехресними.

## Паралельні прямі

На комплексному кресленні однойменні проекції двох паралельних прямих також паралельні між собою, тобто $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$ (рис. 39).

При визначенні паралельних прямих окремого положення на комплексному кресленні треба бути уважним. Наприклад, на рис. 40 дві фронталі не паралельні одна одній, незважаючи на те, що однойменні, горизонтальні проекції паралельні між собою, тобто $f_1$

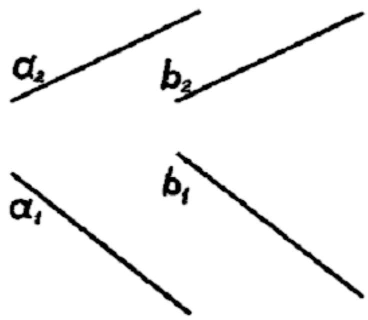



**Рис. 39**

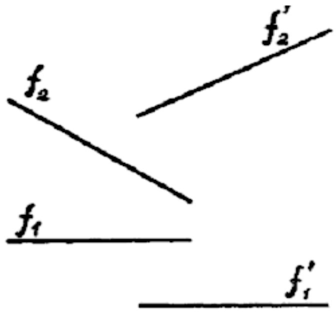



**Рис. 40**

На рис. 41 представлені дві профільні прямі рівня ***p*** і ***p'***. На перший погляд на основному двокартинному кресленні вони здаються паралельними, тому що $p_1 \parallel p_1'$ і $p_2 \parallel p_2'$. Але, побудувавши їх профільні проекції $p_3$ і $p_3'$, ми переконуємося в зворотному.

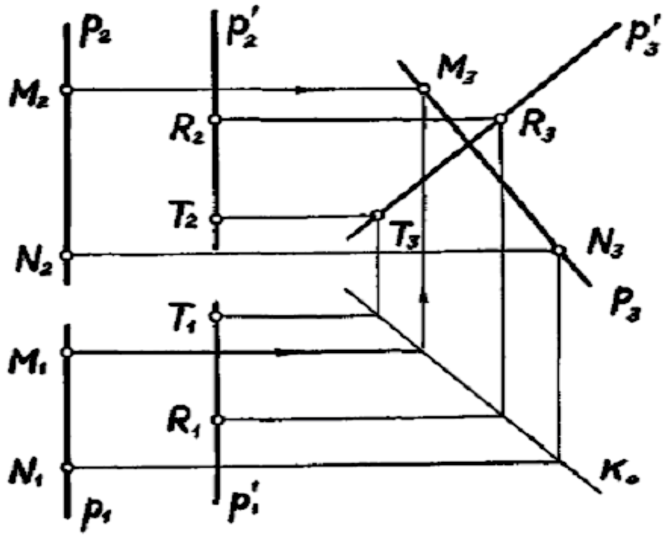



**Рис. 41**

Отже, паралельність будь-яких двох прямих повинна дотримуватися на всіх трьох проекціях.

**Мимобіжні прямі**

Якщо дві прямі мають одну загальну точку, то вони перетинаються в ній. На комплексному кресленні однойменні проекції таких прямих перетинаються в точках, що лежать на одній лінії зв'язку (рис. 42). Тут точка ***К*** – загальна для прямих ***c*** і ***d***.

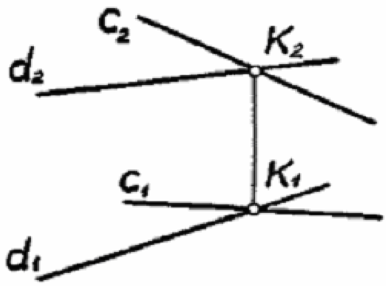



**Рис. 42**

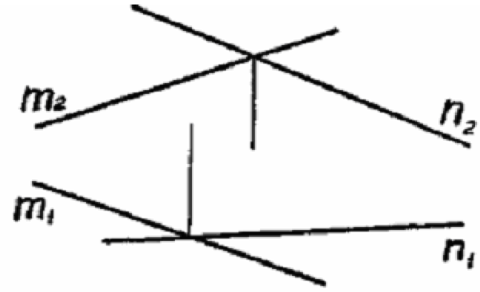



**Рис. 43**

**Перехресні прямі**

Якщо дві прямі не паралельні і не пересікаються, то вони є перехресними, тобто розбіжними (рис. 43). На комплексному кресленні їх однойменні проекції перетинаються в точках, що не лежать на одній лінії зв'язку.

Рекомендується самостійно визначити по рис. 44, 45, 46, як розташовані зображені на них прямі по відношенню одна до одної.

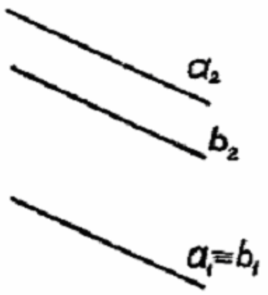



**Рис. 44**

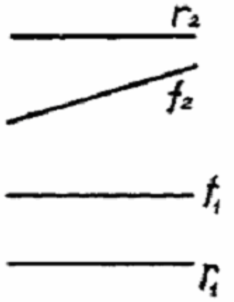



**Рис. 45**

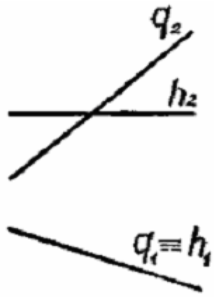



**Рис. 46**

# ВИЗНАЧЕННЯ ВИДИМОСТІ НА КОМПЛЕКСНОМУ КРЕСЛЕННІ

Іноді при рішенні задач є необхідним установити видимість окремих елементів. Звернемося до двох перехресних прямих ***c*** і ***d*** (рис. 47). Вони зображені стовщеними для кращого розуміння питання.

Треба буде розв'язати питання: яка з прямих закриває собою іншу у фронтальній і горизонтальній проекціях?

Почнемо з фронтальної проекції. При розгляданні точки перетинання проекцій $c_2$ і $d_2$ прямих наш промінь зору спрямований від нас по фронтально-проеціюючій прямій $q$ та, як це видно з горизонтальної проекції, перетинає спочатку пряму $d$ у точці **1**, а потім пряму $c$ в точці **2**.

Виходить, у фронтальній проекції ми спочатку бачимо пряму $d$, а потім уже пряму $c$.

Такий метод визначення видимості називають методом двох конкуруючих точок.

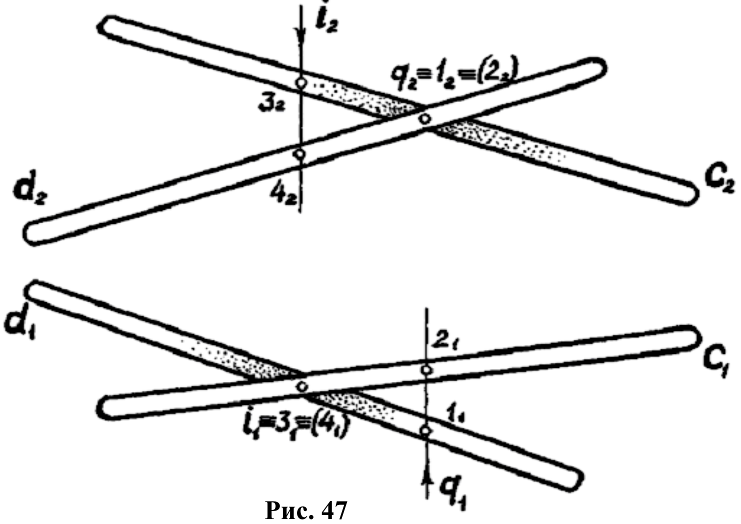



**Рис. 47**

Тут точки **1** і **2** конкурують між собою на видимість, і виграє точка **1**. А оскільки ця точка знаходиться на прямій $d$, значить, ця пряма видима, а пряма $c$ закрита. Факт невидимості точки відзначається дужками.

Тепер розглядаємо точку перетинання горизонтальних проекцій $c_1$ і $d_1$ прямих. Промінь зору при цьому спрямований зверху по горизонтально-проеціюючій прямій $i$ і перетинає спочатку пряму $c$ в точці **3**, а потім пряму $d$ у точці **4**. Виходить, тут уже видима пряма $c$, яка закриває собою пряму $d$. Точки **3** і **4** – конкуруючі.

## ПРО ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОГО КУТА

Представимо дві прямі, що утворять прямий кут. Вони можуть бути як мимобіжними, так і перехресними. Як будуть виглядати проекції цього прямого кута при різних положеннях прямих щодо площин проекцій?

Нехай обидві прямі будуть рівнобіжні однієї площини проекцій (рис. 48). У даному випадку вони є горизонталями $h$ і $h'$.

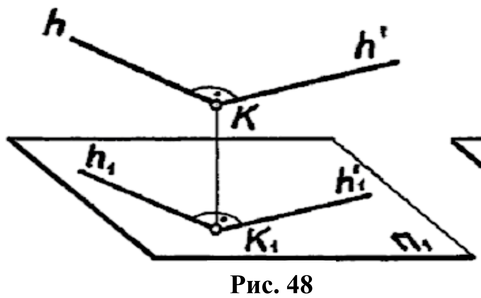



**Рис. 48**

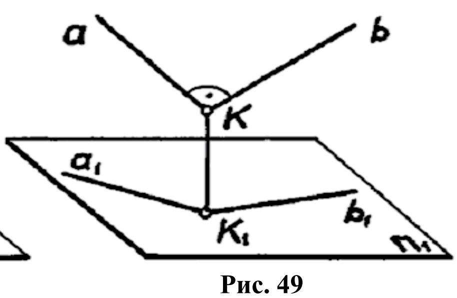



**Рис. 49**

Не потрібно спеціальних доказів, щоб стверджувати, що прямий кут між цими прямими спроеціюється на площину $\Pi_1$ у натуральну величину.

Якщо обидві прямі, що утворять прямий кут, є прямими загального положення (прямі $a$ і $b$ на рис. 49), то цей прямий кут спроеціюється на площину $\Pi_1$ з очевидним перекручуванням, тобто його проекція не буде дорівнювати прямому кутові. Тут докази також зайві.

Нас цікавить проміжний випадок, тобто коли одна пряма – пряма рівня, а інша – загального положення (рис. 50).

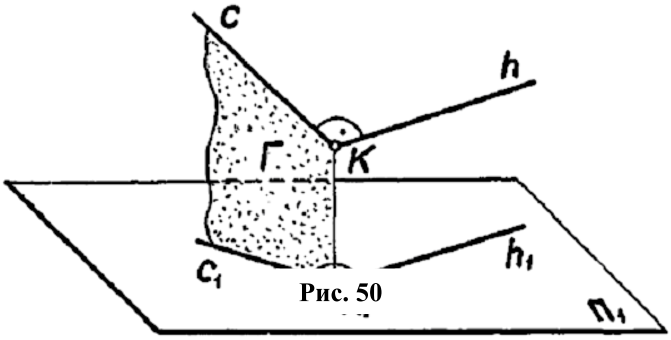



Рис. 50

Рис. 50

Цей прямий кут, утворений прямою загального положення $c$ и горизонталлю $h$, повинен спроеціюватися на площину $\Pi_1$ без перекручування, тобто в натуральну величину. Наведемо наступний доказ.

Нехай через прямі $c$ та $KK_1$ проходить площина $\Gamma$ (гамма). Тоді горизонталь $h \perp \Gamma$, тому що $h \perp c$ та $h \perp KK_1$ (пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна двом пересічним прямим цієї площини). А оскільки $h \parallel h_1$, то $h_1 \perp \Gamma$. Виходить, $h \perp c_1$ (тобто пряма $h_1$ буде перпендикулярна будь-якій прямій у площині $\Gamma$, у тому числі і прямій $c_1$ ). Отже, ми довели, що кут $c_1K_1h_1 = 90^{\circ}$.

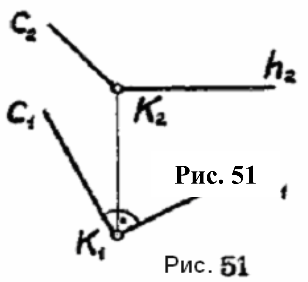



Рис. 51

Рис. 51

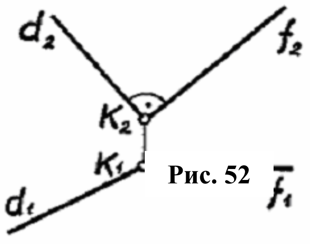



Рис. 52

Рис. 52

На комплексних рис. 51 і 52 зображені проекції прямих кутів, відповідно утворених прямою загального положення $c$ і горизонталлю $h$ (рис. 51), і прямою загального положення $d$ і ф

На заверше … шити, на якому з них зображений

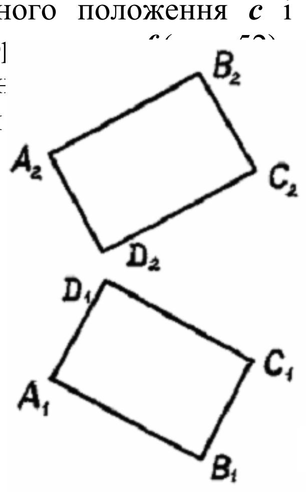



Рис. 53

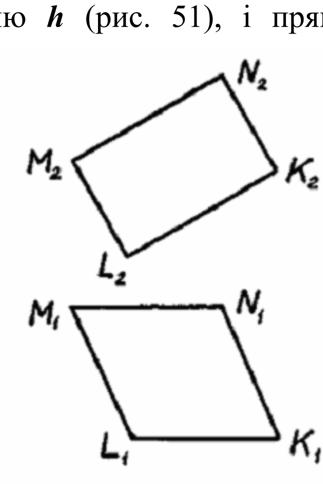



Рис. 54