3.6. Використання теоретико-графових моделей при аналізі складних систем

Одним з основних аспектів дослідження, аналізу і моделювання складних систем є відображення різних зв'язків між елементами цих систем, для чого використовується апарат теорії графів. При аналізі і проектуванні інформаційних систем вершини і ребра графа порівнюють із якісно різними сторонами їхньої структури та функціонування та з різними властивостями елементів системи, тому і відношення між вершинами або ребрами носять якісно різний характер. Моделювання структури таких систем та інформації в них можливо здійснювати за допомогою графів спеціального виду. Однак потрібно мати на увазі те, що при всіх перевагах, які на перший погляд мають місце, використання спеціальних графів ускладнює забезпечення системної зв'язності різних типів інформації і моделей у великих інформаційних системах. Тому необхідно прагнути використовувати по можливості єдиний апарат теорії графів, застосовуючи еквівалентні перетворення спеціальних графів у графи звичайного виду.

Розглянемо деякі типи спеціальних графів.

Поліхроматичні графи

Головним недоліком звичайних графів є відсутність можливості описувати якісно різні набори властивостей, які належать різним вершинам і ребрам, оскільки виявлення та опис різних властивостей складних систем є головною задачею аналізу. Однак традиційний математичний апарат теорії графів [22] не містить засобів одночасного опису та складу і різноманітних властивостей вершин у ребер графа, що звужує можливості аналізу і моделювання реальних систем. Такі засоби містить апарат поліхроматичних графів, заснований на поняттях теорії поліхроматичних множин [21]. За допомогою поліхроматичних графів можливо на основі єдиного апарату теорії графів представити інформацію про прикладну область і реалізувати різноманітні процедури (класифікацію, пошук оптимального складу, структури та ін.) за допомогою як стандартних алгоритмів на графах, так і евристичних алгоритмів.

Головний формалізм в поліхроматичних графах – це колір. Оскільки колір відноситься до категорії властивостей об'єкта, різні кольори можна також описувати в термінах властивостей : i-й колір – властивість $\boldsymbol{F_i}$, j-й колір – властивість $\boldsymbol{F_j}$ і т.д. Поліхроматичний граф представляється у вигляді

$$\boldsymbol{\Pi G} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}), [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})], [\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C})]), \tag{3.65}$$

де $\boldsymbol{A}$ – множина вершин; $\boldsymbol{C}$ – множина ребер; $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ – множина кольорів (властивостей) множини $\boldsymbol{A}$ вершин; $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C})$ – множина кольорів множини $\boldsymbol{C}$ ребер; $[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})]$ – булева матриця, що визначає розфарбування вершин; $[\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C})]$ – булева матриця, що визначає розфарбування ребер графа. Граф $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ із множинами вершин і ребер, еквівалентними (3.65), можна вважати безкольоровим, що відповідає поліхроматичному графу $\boldsymbol{\Pi G}$. Склади контурів вершин представляються булевою матрицею

$$\left\|C_{i(j)}\right\| = [\mathrm{A} \times \mathrm{F(A)}] = \begin{vmatrix} c_{1(1)} & c_{1(2)} & \ldots & c_{1(m)} \\ c_{2(1)} & c_{2(2)} & \ldots & c_{2(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n(1)} & c_{n(2)} & \ldots & c_{n(m)} \end{vmatrix},$$

де $c_{i(j)} = I$, якщо $\boldsymbol{F_j}$ входить до складу $\boldsymbol{F_{(ai)}}$ властивостей $\boldsymbol{a_i}$. Булева матриця контурів ребер має вигляд

$$\left\|E_{i(j)}\right\| = [\mathrm{C} \times \mathrm{F(C)}] = \begin{vmatrix} e_{1(1)} & e_{1(2)} & \ldots & e_{1(m)} \\ e_{2(1)} & e_{2(2)} & \ldots & e_{2(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{1(1)} & e_{1(2)} & \ldots & e_{1(m)} \end{vmatrix}.$$

Якщо будь-яка вершина ai може бути пофарбована тільки в якийсь єдиний колір $\boldsymbol{F_j}$, то в i-му рядку матриці $C_{I(j)}$ буде існувати єдиний елемент $c_{i(j)} = I$, а всі інші елементи будуть дорівнювати 0. Якщо такі ж властивості має і матриця $E_{I(j)}$, то це буде граф із монохроматичними вершинами і ребрами. Такий граф характеризує хроматичне число $\gamma_{(G)}$ і хроматичний індекс $\&_{(G)}$, що визначають розбиття множини **A** і **C** на множини вершин і ребер однакового кольору, що попарно не перетинаються [21].

Якщо вершина a графа може бути розфарбована одночасно в декілька кольорів, то в i-му рядку матриці буде декілька елементів $c_{i(j1)} = c_{i(j2)} = \ldots = c_{i(jk)} = I$, і ця вершина буде поліхроматичною; аналогічними властивостями можуть володіти і ребра графа. Такий граф називається **поліхроматичним,** або $\boldsymbol{\Pi G}$-графом.

З точки зору теорії поліхроматичних множин [21] **поліхроматичним** називається граф *ПS,* вершини ***і/або*** ребра якого є поліхроматичними множинами. Способи опису поліхроматичного графа залежать від характеру взаємозв'язку кольорів вершин і ребер по їх впливу на унітарне розфарбування *F(G)* *ПG*-графа. Поліхроматичні множини вершин і ребер *ПG*-графа мають вигляд:

$$ПS_A = (A, F(\alpha), F(A), [A \times F(\alpha)], [A \times F(A)], [A \times A(F)]);$$
$$ПS_C = (C, F(c), F(C), [C \times F(c)], [C \times F(C)], [C \times C(F)]),$$

де A, C – множини вершин і ребер, розглянутих без врахування їхнього розфарбування; $F(\alpha)$, $F(c)$ – множини персональних кольорів усіх вершин і ребер; $F(A)$, $F(C)$ – множини унітарних кольорів – унітарні розфарбування $ПS_A$ та $ПS_C$; $[A \times F(\alpha)]$, $[C \times F(c)]$ – булеві матриці персональних розфарбувань вершин і ребер; $[A \times F(A)]$, $[C \times F(C)]$ – булеві матриці кольорів вершин і ребер, однойменних унітарним кольорам $F(A)$ і $F(C)$; $[A \times A(F)]$, $[C \times C(F)]$ – булеві матриці варіантів тіл, що забезпечують існування унітарних кольорів $F(A)$, $F(C)$.

Умови існування елементів ***ПG***-графа (вершин і ребер або дуг) за певних умов розглядаються або поза взаємозв'язком елементів $ПS_A$, $ПS_C$, або з урахуванням такого взаємозв'язку. Якщо умови існування унітарних кольорів множин вершин не залежать від умов існування унітарних кольорів множин ребер, то поліхроматичний граф описується четвіркою компонентів:

$$\boldsymbol{ПG} = (G, F(G), ПS_A, ПS_C),$$

де G – опис інцидентности між вершинами і ребрами *ПG*-графа; $F(G)$ – унітарне розфарбування *ПG*-графа, обумовлене у вигляді функції, аргументами якої є розфарбування $F(A)$ і $F(C)$ поліхроматичних множин $ПS_A$, $ПS_C$. Такий граф будемо називати ***ПS***-графом з *незалежним розфарбуванням* вершин і ребер.

У поліхроматичних графах побудова шляхів, ланцюгів, циклів, виділення підграфів та інших операцій відрізняються від аналогічних операцій з безкольоровими графами, тому що в ***ПG***-графах необхідно враховувати обмеження й умови, пов'язані з різним розфарбуванням вершин і ребер. З іншого боку, склад цих обмежень і умов може бути дуже помітним. Це дозволяє формувати набори умов і обмежень, що коректно відображають відношення і зв'язки між елементами і властивостями систем, що аналізуються. При представленні інформації про систему найбільш продуктивними є диз'юнктивна і кон'юнктивна форма зв'язку. Сам ***ПG***-граф при цьому представляється як загальна модель системи, а виділені з нього шляхи, ланцюги, підграфи і т.п. представляються як інформація про елементи системи. Прості шляхи, ланцюги та орієнтовані цикли можуть бути простими знаннями, а всі інші – складними знаннями, які створені об'єднанням декількох простих. Будь-якому простому шляху, представленому як упорядкована послідовність вершин:

$$\mu_I = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}),$$

відповідає розфарбування $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mu}_I)_A$, що є функцією розфарбування вершин:

$$F(\mu_I)_A = \boldsymbol{R}(F((a_{i1}), F(a_{i2}), ..., F(a_{in}))... \quad (3.66)$$

З іншого боку, шлях μ_I може бути подано як впорядкована послідовність дуг:

$$\mu_I = (c_{i1,(i2)}, c_{i2,(i3)}, \ldots, c_{n-1(in)}),$$

і цьому відповідає забарвлення $F(\mu_I)_{i3}$, що є функцією розфарбування дуг:

$$F(\mu_I)_{i3} = R(F(c_{i1,(i2)}), F(c_{i1,(i3)}), ..., F(c_{n-1(in)})). \quad (3.67)$$

Якщо в ***ПG***-графі поліхроматичні і вершини, і дуги, то розфарбування $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mu}_I)$ визначається одночасно обома функціями (3.65), (3.66):

$$F(\mu_I) = \boldsymbol{R}(F((\mu_I)_A, F((\mu_I)_c). \quad (3.68)$$

При аналізі складної системи використовується великий обсяг різної за типом інформації, яка відрізняються складом, типом та повнотою представлення інформації про елементи системи, властивості їх відношення та зв'язки, рівнями абстрагування тощо. Застосування апарату поліхроматичних графів дозволяє поєднувати різні за структурою моделі в єдину систему та застосовувати для їх обробки загальні алгоритми.

На етапі аналізу та вилучення необхідної інформації предметна галузь аналізується на трьох рівнях абстрагування: теоретико-множинному, логічному та кількісному. На кожному рівні виділяються і класифікуються головні властивості та елементи, визначається ієрархія та будуються групи даних для подальшого автоматизованого створення моделей.

При моделюванні складних систем іноді необхідно або доцільно розглядати структури, у яких між тією або іншою парою елементів існує не одна, а кілька різних зв'язків. У подібних випадках замість розглянутих вище ***ПG***-графів використовуються **поліхроматичні мультиграфи**. У мультиграфі, на відміну від звичайного графа, та сама пара вершин може з'єднуватися більш ніж одним ребром [21].

Формалізований опис складу елементів – вершин і ребер або дуг мультиграфа ***MG*** представляється, як і в звичайному графі ***G***, парою

$$\boldsymbol{MG} = (A, C).$$

Однак оскільки будь-яка пара вершин у мультиграфі може з'єднуватися декількома ребрами або декількома дугами однакового напрямку, то зв'язки між вершинами тут не можуть бути представлені булевою матрицею. Елемент $c_{i(j)}$ у булевій матриці суміжності вершин звичайного графа має істинні значення: **1** – якщо вершина a_i є початковою, а вершина a_j – кінцевою вершиною дуги, що з'єднує a_i з a_j; **0** – у протилежному випадку.

У звичайному графі дуга (a_i, a_j), якщо вона існує, є єдиною, що і дозволяє ототожнювати елемент $c_{i(j)} = 1$ булевої матриці з дугою (a_i, a_j), ребро в звичайному графі, що з'єднує вершини a_i, a_j, ототожнюється з парою дуг $c_{i(j)} = c_{j(i)} = 1$. При наявності в мультиграфі декількох дуг однакового напрямку з початковою вершиною a_i і кінцевою вершиною a_j ототожнювати їх з єдиним елементом $c_{i(j)} = 1$ булевої матриці неможливо. Тому інцидентність вершин і ребер мультиграфа представляється булевою матрицею інциденцій вершин і ребер, елементи якої мають істинні значення: **1** – якщо вершина a_i та ребро C_q інцидентні, **0** – у протилежному випадку.

У цьому випадку мультиграф описується трійкою компонентів, до складу яких входить булева матриця

$$\boldsymbol{MG} = (A, C, [A \times C]).$$

Апарат поліхроматичних графів і мультиграфів дає широкі можливості для аналізу і структурного моделювання складних систем, особливо при моделюванні матеріальних і інформаційних потоків у системах різного призначення.

Мережі Петрі

Мережі Петрі – апарат для дослідження та моделювання динамічних дискретних систем (переважно асинхронних та паралельних). Мережа Петрі визначається як четвірка **<P, T, I, O>,** де **P** і **T** – кінцеві множини позицій і переходів, **I** і **O** – множини вхідних і вихідних функцій. Мережа Петрі являє собою дводольний орієнтований граф, у якому позиціям відповідають вершини, зображені колами, а переходам – вершини, зображені стовщеними рисками; функціям **I** відповідають дуги, спрямовані від позицій до переходів, а функціям **O** – від переходів до позицій.

У мережах Петрі, як і у системах масового обслуговування, вводяться об'єкти двох типів: **динамічні** – зображуються мітками (маркерами) усередині позицій і **статичні** – вершини мережі Петрі.

Розподіл маркерів по позиціях називають ***маркіруванням***. Маркери можуть переміщатися в мережі. Кожну зміну маркірування називають ***подією,*** причому кожна подія зв'язана з визначеним переходом. Вважається, що події відбуваються миттєво і різночасно при виконанні деяких умов.

Кожній умові в мережі Петрі відповідає визначена позиція. Здійсненню події відповідає спрацьовування (порушення або запуск) переходу, при якому маркери з вхідних позицій цього переходу переміщаються у вихідні позиції. Послідовність подій утворює модельований процес.

Правила спрацьовування переходів (рис. 3.7) конкретизують таким способом: перехід спрацьовує, якщо для кожної з його вхідних позицій виконується умова $N_i \geq K_i$, де N_i – число маркерів у i-й вхідній позиції, K_i – число дуг, що йдуть від i-ї позиції до переходу; при спрацьовуванні переходу число маркерів у i-й вхідній позиції зменшується на K_i, а в j-й вихідній позиції збільшується на M_j, де M_j – число дуг, що зв'язують перехід з j-ю позицією.

На рис. 3.7 показано приклад розподілу маркерів по позиціях перед спрацьовуванням, це маркірування записують у вигляді (2,2,3,1). Після спрацьовування переходу маркірування стає іншим: (1,0,1,4).

Можна вводити ряд додаткових правил і умов в алгоритми моделювання, одержуючи той або інший різновид мереж Петрі. Так, насамперед корисно ввести модельний час, щоб моделювати не тільки послідовність подій, але і їхню прив'язку до часу. Це здійснюється доданням переходам ваги – тривалості (затримки) спрацьовування, яку можна визначати, використовуючи алгоритм, що задається при цьому. Отриману модель називають *тимчасовою* мережею Петрі.

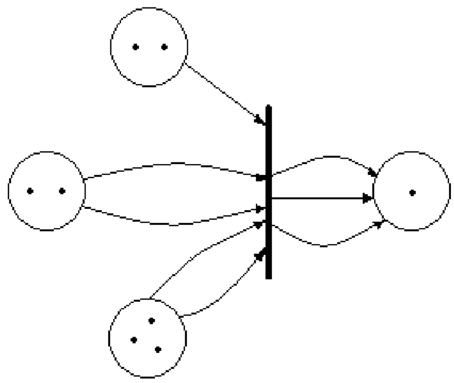

Рис. 3.7. Фрагмент мережі Петрі

Якщо затримки є випадковими величинами, то мережу називають *стохастичною.* У стохастичних мережах можливе введення імовірностей спрацьовування збуджених переходів. Так, на рис. 3.8 представлено фрагмент мережі Петрі, що ілюструє конфліктну ситуацію – маркер у позиції p може запустити або перехід t_1, або перехід t_2. У стохастичній мережі передбачається ймовірнісний вибір переходу, що спрацьовує, у таких ситуаціях.

Якщо затримки визначаються як функції деяких аргументів, якими можуть бути групи маркерів у яких-небудь позиціях, стану деяких переходів і т.п., то мережу називають функціональною.

У багатьох задачах динамічні об'єкти можуть бути декількох типів, і для кожного типу потрібно вводити свої алгоритми поведінки в мережі. У цьому випадку кожен маркер повинен мати хоча б один параметр, що позначає тип маркера. Такий параметр звичайно називають кольором; колір можна використовувати як аргумент у функціональних мережах. Мережу Петрі при цьому називають кольоровою.

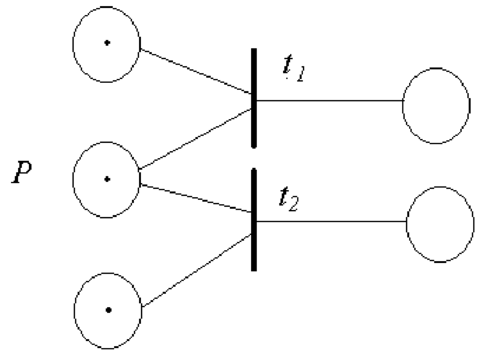

Рис. 3.8. Конфліктна ситуація

Серед інших різновидів мереж Петрі варто згадати ***інгібіторні*** мережі, що характеризуються тим, що в них можливі забороняючі (інгібіторні) дуги. Наявність маркера у вхідній позиції, що зв'язана з переходом інгібіторною дугою, означає заборону спрацьовування переходу.

Аналіз складних систем на базі мереж Петрі можна виконувати за допомогою імітаційного моделювання СМО, представлених моделями мереж Петрі. При цьому задають вхідні потоки заявок і визначають відповідну реакцію системи. Вихідні параметри СМО розраховують шляхом обробки накопиченого при моделюванні статистичного матеріалу.

Можливий і інший підхід до використання мереж Петрі для аналізу об'єктів та систем, які досліджуються на системному рівні. Він не зв'язаний з імітацією процесів і заснований на дослідженні таких властивостей мереж Петрі, як обмеженість, безпека, збережуваність, досяжність, жвавість.

Обмеженість (або *К-обмеженість)* має місце, якщо число міток у будь-якій позиції мережі не може перевищити значення *К.* При проектуванні автоматизованих систем визначення дозволяє обгрунтовано вибирати ємкості накопичувачів. Можливість необмеженого росту числа міток свідчить про небезпеку необмеженого росту довжин черг.

Безпека – окремий випадок обмеженості, а саме це 1-обмеженість. Якщо для деякої позиції встановлено, що вона безпечна, то її можна представляти одним тригером.

Збережуваність характеризується сталістю завантаження ресурсів, тобто

$$\sum A_i N_i = \text{const},$$

де N – число маркерів у i-й позиції; A_i – ваговий коефіцієнт.

Досяжність $M_k \to M_j$ характеризується можливістю досягнення маркірування M_j зі стану мережі, що характеризується маркіруванням M_k.

Жвавість мережі Петрі визначається можливістю спрацьовування будь-якого переходу при функціонуванні об'єкта, що моделюється. Відсутність жвавості свідчить або про надмірність апаратури в системі, яка досліджується, або про можливості виникнення зациклень, тупиків, блокувань.

В основі дослідження перерахованих властивостей мереж Петрі лежить *аналіз досяжності.*

Один з методів аналізу досяжності будь-якого маркірування зі стану M_0 – побудова *графа досяжності.* Початкова вершина графа відображає M_0, а інші вершини відповідають маркіруванням. Дуга з M_j у M_k означає подію $M_k \to M_j$ і відповідає спрацьовуванню переходу I. У складних мережах граф може містити надмірно велике число вершин і дуг. Однак при побудові графа можна не відображати усі вершини, тому що багато хто з них є дублями (дійсно, від маркірування M_k завжди породжується той самий підграф незалежно від того, з якого стану система прийшла в M_k). Тупики виявляються по відсутності дозволених переходів з якої-небудь вершини, тобто по наявності листів – термінальних вершин. Необмежений ріст числа маркерів у якій-небудь позиції свідчить про порушення обмеженості.

Контрольні питання до розділу 3

1. Для чого необхідно застосовувати систему методів при дослідженні складних систем?
2. Дати характеристику системним стратегіям вибору методів.
3. Що таке метод аналогій?
4. Дати характеристику методу контрольних питань.
5. Охарактеризувати метод мозкової атаки.
6. Дати характеристику методу морфологічних ящиків.
7. Дати визначення евристичного прийому.
8. Чим відрізняється метод аналогій від методу написання сценаріїв?

9. Що таке дерево цілей?
10. Дати характеристику інформаційному підходу визначення узгодженості експертних оцінок.
11. Дати характеристику рекурентним процедурам стійкого оцінювання.
12. Дати характеристику поняття структури моделі.
13. Сформулювати етапи побудови регресійної моделі по часових рядах.
14. Що таке поліхроматичний граф?
15. Головні властивості поліхроматичного графу.
16. Який граф називають мережею Петрі?
17. Що таке маркірування?
18. Дати характеристику інгібіторним мережам Петрі.
19. Дати характеристику головним властивостям мереж Петрі.