

4.2. Середня гармонійна величина

Дуже часто при дослідженні біологічних і екологічних об'єктів зустрічається необхідність визначення середньої величини з конкретних значень, які є функцією другої ознаки або явища.

Наприклад. Біологічну активність популяції кротів можна охарактеризувати масою ґрунту, яку вони виносять на поверхню за одиницю часу (добу, годину). Але кожен кріт має свою особисту активність, тобто за добу один кріт, наприклад, викине на поверхню $0,8 \text{ м}^3$ ґрунту, другий $1,5$; третій $1,4 \text{ м}^3$; четвертий $2,0$; п'ятий $1,0$; шостий $0,8$; сьомий $0,6$; восьмий $1,2$; дев'ятий $1,4$; десятий $2,0 \text{ м}^3$. *Питання:* скільки один кріт популяції в середньому викине на поверхню ґрунту землі? І друге питання: скільки одному кроту популяції в середньому необхідно часу для того, щоб на поверхню ґрунту викинути 1 м^3 ґрунту. Можна розрахувати за способами визначення звичайної середньої величини, скільки на поверхню ґрунту викидає за добу в середньому один кріт популяції. Але відповідь на питання, скільки часу в середньому витрачає кріт даної популяції на те, щоб винести на поверхню 1 м^3 ґрунту, проста середня арифметична величина не дає.

Справа у тому, що ознаки, які тут вивчаються, знаходяться у зворотній пропорційності до другої ознаки, яка пов'язана з досліджуваною ознакою

• Варіанта (кріт)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
• Викинуто ґрунту на поверхню (x) за добу	0,8	1,5	1,4	2,0	1,0	0,8	0,6	1,2	1,4	2,0
$\Sigma 12,7 \text{ м}^3$ за добу										

функційно. Так, середня кількість часу, який необхідний для викидання на поверхню кожним кротом 1 м^3 ґрунту, складає $1/x$, де x – значення окремої варіанти. Тому середня кількість часу, який необхідний для того, щоб дана популяція кротів викинула 1 м^3 ґрунту, є середньою гармонійною величиною (x_n), яка є відношенням загального числа спостережень (n) до суми їх зворотніх значень, тобто

$$\bar{x}_q = \sqrt[3]{5 \cdot 8 \cdot 25} = \sqrt[3]{1000} = 10. \quad (4.3)$$

де x – значення окремої варіанти.

О т ж е , п о с т а в л е н а з а д а ч а в и р і ш у є т ь с я в н а с т у п н і й л о г і ч н і й п о с л і д о в н о с т і .	1 кріт – 24 : 0,8 = 30,0	6 кріт – 24 : 0,8 = 30,0
	2 кріт – 24 : 1,5 = 14,0	7 кріт – 24 : 0,6 = 40,0
	3 кріт – 24 : 1,4 = 17,1	8 кріт – 24 : 1,2 = 20,0
	4 кріт – 24 : 2,0 = 12,0	9 кріт – 24 : 1,4 = 17,1
	5 кріт – 24 : 1,0 = 24,0	10 кріт – 24 : 2,0 = 12,0

Отже, 10 кротів за добу викинули $12,7 \text{ м}^3$ ґрунту, тобто проста середньоарифметична дає значення: в середньому один кріт викидає за добу

$$c = \frac{30,0 + 14,0 + 17,1 + 12,0 + 24,0 + 30,0 + 40,0 + 20,0 + 17,1 + 12,0}{10} = 21,9 \text{ год.}$$

– $12,7 : 10 = 1,27 \text{ м}^3$, тобто на 1 м^3 витрачається: $24 : 1,27 = 18,1$ год.

А за одну годину в середньому кріт популяції нібито виносить

$$1,27 : 24 = 0,053 \text{ м}^3.$$

Однак розрахунки, проведені за правилами визначення середньої гармонічної, дають інші результати. Такі розрахунки можна провести по двох методичних варіантах.

Варіант 1. Визначається, скільки часу необхідно кожному кроту для того, щоб викинути 1 м^3 ґрунту на поверхню.

$$x_h = 10 : \left(\frac{1}{0,8} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{2,0} + \frac{1}{1,0} + \frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,6} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{2,0} \right) =$$

Далі визначається, скільки часу в середньому необхідно кроту даної популяції для того, щоб викинути на поверхню 1 м^3 ґрунту (ч):

Варіант 2. Визначаємо, скільки ґрунту винесе на поверхню в середньому один кріт популяції за добу за формулою розрахунку середньої гармонічної (4.3):

$$\bar{x}_q = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

$$10 : 9,06 = 1,1 \text{ м}^3$$

(а не $1,27 \text{ м}^3$, як це дали розрахунки із застосуванням середньої арифметичної).

Визначаємо, скільки часу в середньому необхідно кроту даної популяції для того, щоб викинути на поверхню 1 м^3 ґрунту: $x = 24 : 1,1 = 21,9$. Це так само, як за варіантом розрахунків 1.

Тобто за одну годину в середньому кріт популяції винесе на поверхню:

$$1,1 \text{ м}^3 : 24 \text{ год} = 0,046 \text{ м}^3$$

(а не $0,053$, як це дали розрахунки із застосуванням середньої

арифметичної).

Як бачимо, визначення середньої гармонічної за варіантом 1 і варіантом 2 дає однакові результати (21,9 год), але розрахунки за формулою (3) менш трудомісткі.

Завдання. 5 доярок протягом години надоїли таку кількість молока (л): 1 – 10; 2 – 20; 3 – 25; 4 – 30; 5 – 20.

Вирішити питання: скільки часу в середньому витрачає доярка на надоювання 1 л молока?