УДК 539.3:534.1

КАІРОВ О.С., Миколаївський державний гуманітарний університет, м. Миколаїв
МОРГУН С.О., КАІРОВ В.О., Національний університет кораблебудування, м. Миколаїв

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТРИШАРОВИХ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі геометрично нелінійної теорії оболонок типу С.П. Тимошенка розроблені математична модель і методика розрахунку напружено-деформованого стану тришарових пружних композитних циліндричних оболонок обертання при поздовжньому імпульсному навантаженні. Приведено результати чисельних досліджень розглянутої оболонкової системи.

The mathematical model and the calculation method for stress-strained state of three-layered elastic composite cylindrical shells under longitudinal impulse loading have been developed on the basis of geometrically non-linear theory of S.P.Timoshenko's type shells. The numerical results of the shells system are presented.

Постановка проблеми. Шаруваті оболонкові конструкції часто використовуються як інженерні споруди та конструкції в машинобудуванні та інших галузях сучасної техніки. Тому питання їх міцності та стійкості при динамічному навантаженні має велике практичне значення, а також з точки зору ресурсозбереження.

При моделюванні динамічної поведінки шаруватих оболонок у рамках прикладних теорій, які базуються на використанні різних гіпотез, існує два основних напрямки. Перший напрямок характеризується застосуванням методу єдиних гіпотез по товщині для всього пакету шарів оболонки. У цьому випадку порядок розв'язуючих рівнянь не залежить від кількості шарів. Другий підхід ґрунтується на застосуванні незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. У даному випадку порядок розв'язуючої системи рівнянь залежить від кількості шарів оболонки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З оглядових робіт [1, 2, 4] по даній проблемі випливає, що до наступного часу при дослідженні динамічної поведінки багатошарових конструкцій в основному використовується перший підхід. Таким чином, розвиток існуючих методів розрахунку нестаціонарних коливань тришарових оболонок при нестаціонарних навантаженнях та порівняльний аналіз одержаних результатів являє собою актуальну проблему механіки шаруватих оболонкових конструкцій.

Метою даної роботи є розробка методики розрахунку та дослідження впливу поздовжнього імпульсного навантаження на напружено-деформований стан і несучу здатність конструктивно неоднорідних тришарових композитних циліндричних оболонок.

Викладення основного материалу. Тришарова пружна оболонкова система складається із

зовнішньої та внутрішньої обшивок у вигляді тонкостінних оболонок, які з'єднані між собою кусково-однорідним заповнювачем. Заповнювач характеризується матеріалом типу пенопластів.

Побудова математичної моделі, що описує динамічні процеси в неоднорідній пружній оболонці, базується на наступних гіпотезах. Припускається, що напружено-деформований стан вихідної структури може бути визначено в рамках теорії оболонок типу Тимошенка для обшивок та кусково-однорідного заповнювача при прийнятті незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного із шарів з врахуванням поперечніх нормальних та зсувних деформацій в заповнювачі. Деформаційні співвідношення для кожного шару приймаються в рамках нелінійної теорії оболонок в квадратичному наближенні. Параметри пружності змінюються від шару до шару, тобто являються кусково-неперервними функціями координати z.

При розгляді заповнювача враховується вплив поперечного нормального напруження. В області тришарової оболонки з однорідним заповнювачем приймаються незалежні апроксимації переміщень та поперечних зсувних і нормальних напружень по товщині відповідних шарів. При цьому, за незалежні шукані функції приймаються компоненти вектора переміщень на поверхнях шарів у вигляді:

$$\overline{U} = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), w_1(x), w_3(x))^T .$$

Для оцінки несучої здатності та умов втрати оболонкою несучої здатності використовується критерій текучості Мізеса.

У рамках геометрично нелінійної теорії оболонок в квадратичному наближенні компоненти тензора деформацій обшивок та заповнювача мають вид:

$$\varepsilon_{11}^{kz} = \varepsilon_{11}^{k} + zk_{11}^{k}, \quad \varepsilon_{22}^{kz} = \varepsilon_{22}^{k} + zk_{22}^{k},$$

$$\varepsilon_{13}^{kz} = \varphi_1^k + \theta_1^k, \quad \varepsilon_{33}^{2} = \varphi_3^2,$$

$$\varepsilon_{11}^{k} = \frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2}(\theta_1^k)^2 + \frac{u_3^k}{R}, \quad \varepsilon_{22}^{k} = \frac{u_3^k}{R}, \quad (1)$$

$$k_{11}^{k} = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x}, \quad k_{22}^{1} = k_{22}^{3} = 0, \quad k_{22}^{2} = \frac{\varphi_1^2}{R},$$

$$\theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial x} - \frac{u_1^k}{R}, \quad k = \overline{1,3} .$$

Для виводу рівнянь коливань багатошарової оболонки використовується варіаційний принцип Остроградського-Гамільтона. Після стандартних перетворень, з урахуванням інтегральних характеристик напружень для обшивок і заповнювача та співвідношень деформацій-переміщень, одержимо систему рівнянь коливань. Таким чином, нестаціонарні коливання оболонкової системи описується диференціальними рівняннями виду:

$$L_n(\overline{U}) + P_n = Q_n\left(\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2}\right)$$
$$(n = \overline{1,6}), \quad (2)$$

де $L_n(U)$ – диференціальні оператори еліптичної частини рівнянь коливань нелінійної теорії оболонок [3]; $Qn(\partial^2 U/\partial t^2)$ – диференціальні оператори, які враховують переміщення та інерційні складові рівнянь коливань оболонкової системи [3]; P_n – компоненти узагальненого вектору поверхневого навантаження. Основною особливістю рівнянь коливань (2) є геометрична не лінійність. Таким чином, одержана математична модель являє собою гіперболічну нелінійну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, які доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

Інтегральні характеристики напружень для кожного шару задаються згідно формул:

$$(T_{11}^k, T_{22}^k, T_{13}^k, T_{33}^2) = \int_z (\acute{r}\text{Ъ}_{11}^{kz}, \acute{r}\text{Ъ}_{22}^{kz}, \acute{r}\text{Ъ}_{13}^{kz}, \acute{r}\text{Ъ}_{33}^{3})dz ,$$

$$(M_{11}^k, M_{22}^k) = \int_z (z^k \acute{r}\text{Ъ}_{11}^{kz}, \ z^k \acute{r}\text{Ъ}_{22}^{kz})dz , \ k = \overline{1,3};$$

$$z \in [-h/2, h/2]$$

Рівняння коливань (2) доповнюються відповідними крайовими і початковими умовами.

В основу побудови чисельного алгоритму розв'язання покладена кінцево-різницева апроксимація рівнянь коливань (2) за просторовими координатами та явна по часовій координаті, що потребує обмеження на кроки різницевої сітки [6]. Такій підхід дозволяє зберегти дивергентну форму різницевого представлення розв'язувальних рівнянь та забезпечити виконання закону зберігання повної механічної енергії оболонкової системи на різницевому рівні.

У матрично-векторному вигляді різницеві рівняння (2) представляються наступною залежністю:

$$[D]\overline{U} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\overline{F}(t),$$

де $[D]=[M]^{-1}[C]$ – узагальнена матриця; $[C]$ і $[M]$ – матриці жорсткості і мас дискретної різницевої системи; U і $F(t)$ – вектори дискретних переміщень і зовнішнього навантаження. (3)

Застосування явної кінцево-різницевої схеми приводить до обмеження на використання дискретного тимчасового кроку різницевої сітки. Необхідна умова стійкості різницевих схем виражається залежністю [5]:

$$\Delta t \geq 2 / \acute{r}\text{Ц}_{max} ,$$

де $\omega_{max} = \max(\omega_0)$ – максимальні частоти власних коливань відповідно обшивок оболонки та заповнювача; Δt – величина кроку по тимчасовій координаті. Максимальні власні частоти відповідають поперечним зсувним коливанням оболонкової системи. При товщині оболонки менш розміру просторових різницевих (4)

кроків умова стійкості (4) приводить до зниження ефективності використання явної різницевої схеми та вимагає підвищення кроку інтегрування методом регуляризації [5].

Розглянемо задачу дослідження нестаціонарної поведінки тришарової циліндричної консольно закріпленої оболонки, на вільний край якої діє поздовжнє крайове імпульсне навантаження. Розрахунки проводилися для двох моделей, побудованих згідно неоднорідних по товщині теорії оболонок типу Тимошенка, а саме: з використанням незалежних кінематичних і статичних гіпотез до кожного шару та єдиних гіпотез до всього пакету шарів.

Поздовжнє крайове імпульсне навантаження задавалося у вигляді:

$$F(t) = A_1 \sin(\pi t/T)\left[\eta(t) - \eta(t-T)\right],$$

де A_1 – амплітуда навантаження; $\eta(t)$ – функція Хевісайда; T – тривалість навантаження; t – час. Параметри навантаження такі: A1 = 0,1 МПа·м; $T = 50\cdot10^{-6}$с.

Покладалися наступні геометричні та фізико-механічні параметри зовнішніх шарів з товщинами h_1 і h_3 та заповнювача: $h_1 = h_3 = 10^{-3}$ м; $h_2 = 8\cdot10^{-3}$ м; $h = h_1 + h_2 + h_3$; $R/h = 10$; L/R = 4; $E_1^1 = E_2^1 = 70$ ГПа; $E_1^3 = E_2^3 = E_1^1$; $\nu_1^1 = \nu_2^1 = 0{,}33$; $\nu_1^3 = \nu_2^3 = \nu_1^1$; $\rho_1 = \rho_3 = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3; $E_1^3 = E_2^3 = E_1^1/100$; $\rho_2 = 3\cdot10^2$ кг/м^3.

Було розглянуто різні варіанти результатів напружено-деформованого стану при нестаціонарній поведінці оболонок при заданому навантаженні на досліджуваному інтервалі часу $0 \le t \le 40\ T$.

На рис. 1, ***а*** приведено результати розрахунків величини прогину u_3 по довжині конструкції відповідно для внутрішньої обшивки – крива 1, зовнішньої обшивки – крива 2 (згідно теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез до кожного шару) і для всього пакету – крива 3 (теорія єдиних гіпотез по товщині для всього пакету шарів). На рис. 2, ***б*** приводиться розподіл величини прогину u_3 для серединної поверхні заповнювача. Крива 1 відповідає розрахункам згідно теорії з використанням незалежних гіпотез до кожного шару, крива 2 – згідно теорії єдиних гіпотез по товщині для всього пакету шарів. Прогини оболонки відповідають моментам часу $t = 10\ T$, коли відповідні величини досягають максимальних значень.

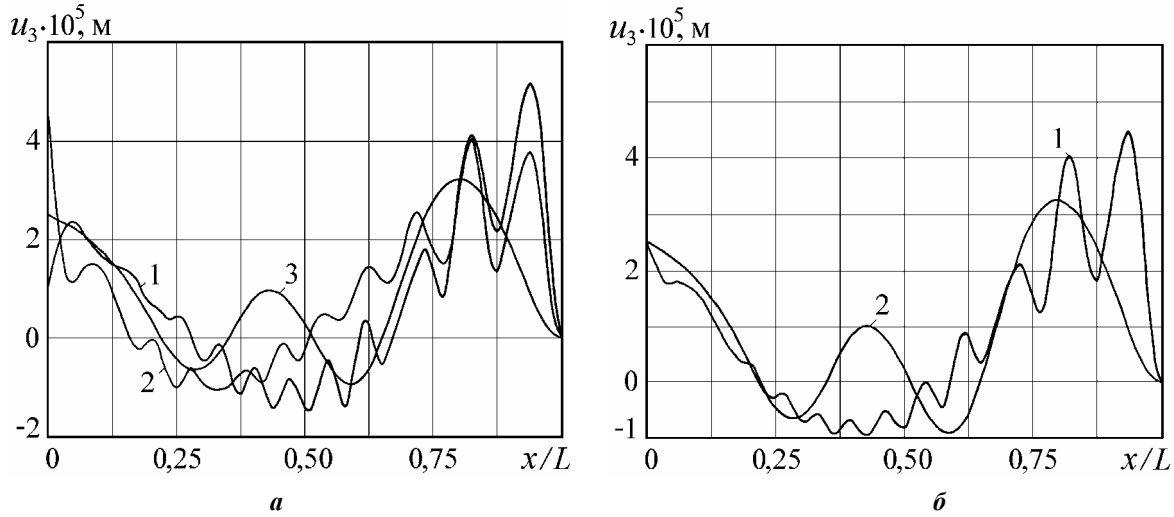
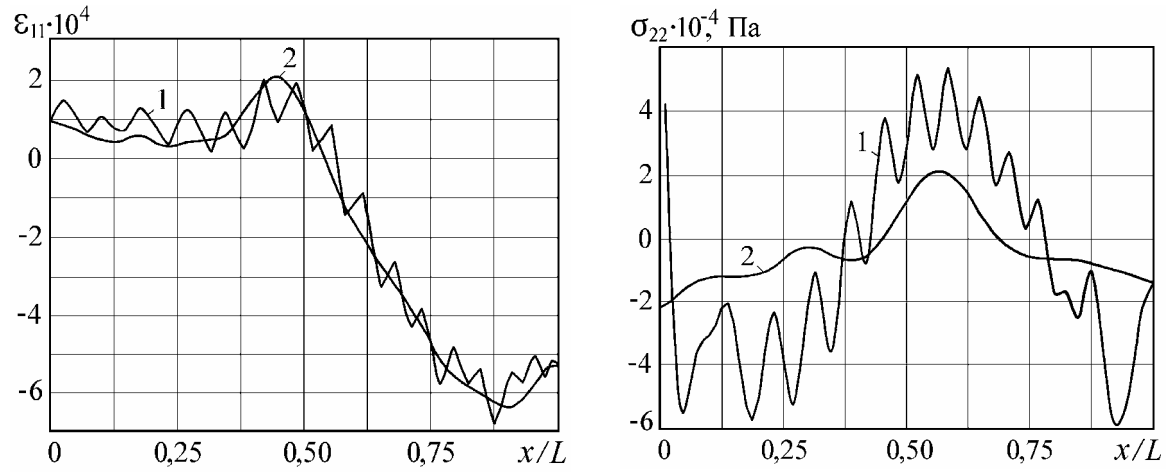


Рис. 1. Залежність величини прогину u_3 по довжині оболонки

Аналізуючи приведені залежності бачимо, що згідно теорії з використанням незалежних гіпотез до кожного шару, прогинам u_3 властиве більш густе хвилеутворення в порівнянні з теорією пакету, а різниця в максимальних амплітудах прогинів при цьому сягає порядка 20 %, зберігається також якісна різниця в поведінці прогинів для заповнювача на відміну від поведінці прогинів для зовнішніх шарів.

Проаналізуємо поведінку величини поздовжньої деформації $\mathcal{F}_{11}$ в серединній поверхні заповнювача. На рис. 2, ***а*** приведено розподіл величини деформації $\mathcal{F}_{11}$ по довжині конструкції в момент часу $t = 9\ T$ (час досягнення максимальних деформацій). Як видно з приведених залежностей, спостерігається лише якісна різниця в поведінці величини $\mathcal{F}_{11}$, що виливається в більш густе хвилеутворення для теорії з використанням гіпотез для кожного шару. Кількісної різниці по максимальним величинам не спостерігається, тобто максимальні величини деформації $\mathcal{F}_{11}$ в серединній поверхні заповнювача згідно розрахунків по двох теоріях співпадають.



а *б*

Рис. 2. Величина деформацій $\mathcal{F}_{11}$ і напружень σ_{22} в серединній поверхні заповнювача по довжині оболонки

Перейдемо до аналізу величини напруження σ_{22} в серединній поверхні заповнювача в залежності від просторової координати x. Рис. 2, ***б*** відповідає залежності σ_{22} в заповнювачі по довжині оболонки в момент часу $t = 9\ T$ (час досягнення максимальних напружень).

Аналізуючи приведені залежності можемо зробити висновок, що максимальні значення величини напруження σ_{22} в заповнювачі згідно теорії з використанням незалежних гіпотез до кожного шару в 4 рази більші від відповідних величин, згідно теорії з використанням єдиних гіпотез по товщині для всього пакету шарів. Відмітимо, що якісний характер поведінки величини σ_{22} по довжині конструкції (процес хвилеутворення) зберігається аналогічним характеру поведінки величин u_3 і $\mathcal{F}_{11}$.

Висновки. Досліджено напружено-деформований стан шаруватих композитних циліндричних оболонок обертання з урахуванням структури матеріалу при поздовжньому імпульсному навантаженні та запропоновані шляхи підвищення їх несучої здатності.

Порівняльний аналіз одержаних результатів згідно основних прикладних теорій показав високу ефективність розробленої уточненої математичної моделі і методики розрахунку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
2. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
3. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
4. Луговой П.З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37. – № 5. – С. 44-73.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Надійшла до редколегії 21.04.08