УДК 629.584

ТРУНОВ А.Н., Николаевский государственный гуманитарный университет им. Петра Могилы

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОДВОДНОГО АППАРАТА

Рассматриваются уравнения движения ПА с проницаемым корпусом. Исследуется влияние инфильтрационных эффектов на коэффициенты присоединенных масс. Выводятся уравнения движения ПА с переменным центром масс.

There considered equations of SA motion with penetrable body. Explored infiltration effects impact on addition mass coefficient. Also derived equations of SA motion with changing mass center.

Общие проблемы проектирования технологических необитаемых подводных аппаратов (НПА)

Опыт эксплуатации НПА при выполнении осмотровых и аварийно спасательных работ в речных и морских условиях в ходе выполнения работ по предотвращению техногенных аварий либо их последствий свидетельствует о том, что изменения геометрических характеристик подводного аппарата (ПА) во время функционирования существенно изменяет их динамические свойства, создавая дополнительные силы и моменты, компенсация которых становится невозможной. В этой связи формируются условия, при которых возникает аварийная ситуация, приводящая к полному отказу ПА или частичному повреждению отдельных его устройств.

В связи с изложенным, задача проектирования трех основных типов ПА:-технологических, осмотровых ПА, носителей ПА, которые в большинстве случаев содержат системы и устройства изменяющие геометрические обводы корпусов, и пространственную ориентацию отдельных частей корпуса и навесного оборудования, является актуальной [3,4,9,12]. Однако ее решению должно предшествовать построение адекватных моделей ПА с изменяющейся геометрией, поскольку в настоящее время таковые в литературе отсутствуют. Последнее обусловлено необходимостью учета при моделировании изменения как их инерционных, так и гидравлических характеристик, что возможно осуществить только посредством построения соответствующих методов расчета. Существующие в настоящее время и используемые в практике проектирования модели приближенны, поскольку они не учитывают изменения положения центра масс и его моментов инерции, формы ПА и коэффициентов присоединенных масс .

Анализ последних исследований и публикаций, вывод уравнений движения ПА с проницаемым корпусом

В настоящее время, в связи с особыми требованиями по надежности и безопасности функционирования ПА, проектирование автоматических систем управления их движением представляет собой сложную научно-техническую проблему. В силу многообразия конструктивных решений, сложности кинематических и динамических связей в объектах, особых условий движения, как самого ПА, так и его устройств, на проектирование системы управления и исполнительных механизмов требуется значительные затраты времени.

Существенная экономия средств и времени обеспечивается за счет автоматизированного проектирования по оптимальным алгоритмам.

Однако, постановке задачи оптимального проектирования должно предшествовать формирование адекватных моделей.

В последнее десятилетие опубликовано целый ряд работ [3-6,10,11], в которых рассматриваются различные аспекты расчета и проектирования систем управления, формирования математических моделей ПА [3,9]. Тем не менее, проблема учета влияния инфильтрационных эффектов на коэффициенты присоединенных масс, поставленная в работах [8,12]

остается не достаточно изученной и доведенной до инженерных методик расчета. Особенно она актуальна для рабочих ПА, у которых относительная площадь отверстий достигает до (30□40) % от общей площади поперечного сечения, а относительный объем занятый водой, в общем объеме ограниченном легким корпусом, составляет (12-25)%.

Поставим целью настоящего раздела вывод уравнений движения для ПА с проницаемым корпусом, и обоснование метода учета влияния инфильтрационных процессов на присоединение массы.

Рассмотрим геоцентрическую систему координат $Ox'y'z'$, в которой движется ПА, полагаемый в дальнейшем абсолютно твердым телом (рис. 1).

Далее, полагая главный вектор $\overline{R}$ и главный момент $\overline{M}$ внешних сил известными, в соответствии с законами динамики, аналогично с подходом, к описанию движения абсолютно твердого тела в безграничной жидкости, изложенными в работах [5,6,10,11] запишем уравнения движения ПА в классической постановке в системе координат $Ox'y'z'$.

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{R} \quad ;$$

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{M} \quad ; \qquad (1)$$

где $\overline{K}$, $\overline{L}$ – соответственно главные вектора импульса и момента импульса.

Рассмотрим далее систему координат $oxyz$, жестко связанную с ПА. В ней начало отсчета движется с линейной скоростью $\overline{v}$, а ПА вращается вокруг точки O, с угловой скоростью $\overline{\Omega}$.

Уравнение движения ПА в ней имеют вид:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{K} = \overline{R} \quad ;$$

$$\frac{d\overline{L}}{dt} + \overline{\Omega} \times \overline{L} + \overline{v} \times \overline{K} = \overline{M} \quad ; \qquad (2)$$

Последние два векторные уравнения приведем к шести скалярным, посредством разложения стоящих в них векторных произведений по элементам первых строк – ортов связанной системы координат и последующего проектирования на эти оси

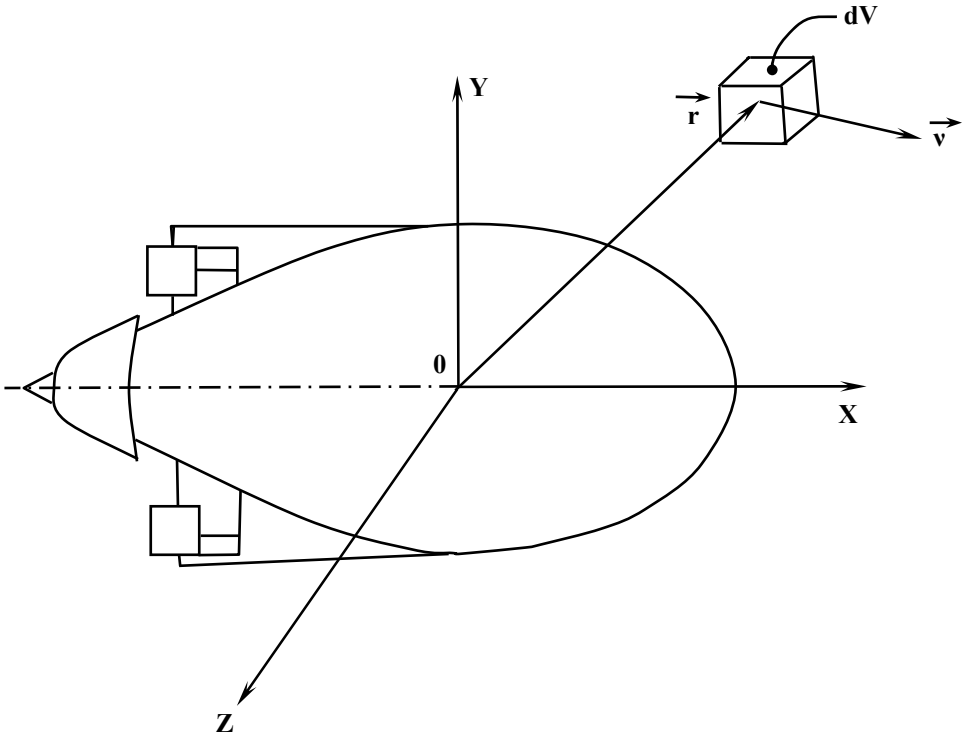

Рис. 1. Кинематическая схема ПА

$$\frac{dK_x}{dt}+\omega_y K_z-\omega_z K_y=R_x \quad ,$$

$$\frac{dK_y}{dt}+\omega_z K_x-\omega_x K_z=R_y \quad ,$$

$$\frac{dK_z}{dt}+\omega_x K_y-\omega_y K_x=R_z \quad ,$$

(3)

$$\frac{dL_x}{dt}+\omega_y L_z-\omega_z L_y+v_y K_z-v_z K_y=M_x \quad ,$$

$$\frac{dL_y}{dt}+\omega_z L_x-\omega_x L_z+v_z K_x-v_x K_z=M_y \quad ,$$

(4)

$$\frac{dL_z}{dt}+\omega_x L_y-\omega_y L_x+v_x K_y-v_y K_x=M_z$$

.

Для дальнейшего упрощения уравнений движения воспользуемся представлением проекции импульса и момента импульса через кинетическую энергию W

$$K_x=\frac{\partial W}{\partial v_x};K_y=\frac{\partial W}{\partial v_y};K_z=\frac{\partial W}{\partial v_z};$$

$$L_x=\frac{\partial W}{\partial \omega_x};L_y=\frac{\partial W}{\partial \omega_y};L_z=\frac{\partial W}{\partial \omega_z}$$

$$W_A=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)+mv_x(\omega_y z-\omega_z y)+mv_y(\omega_z x-\omega_x z)+mv_z(\omega_x y-\omega_y z)+\frac{1}{2}J_{xx}\omega_x^2$$
$$+\frac{1}{2}J_{yy}\omega_y^2+\frac{1}{2}J_{zz}\omega_z^2-J_{xy}\omega_x\omega_y-J_{xz}\omega_x\omega_z-J_{yz}\omega_y\omega_z$$

где m – масса ПА, x_c, y_c, z_c – координаты его центра масс в связанной системе координат, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – моменты инерции и J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} – центробежные моменты инерции,

$$J_{xx}=\int_m \left(y^2+z^2\right)dm;\quad J_{xz}=\int_m yzdm;$$

и так далее. Выражение (7) представим в матричной форме

$$W_A=0.5[v^T\Omega^T]I\begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix}$$

, (8)

где $v=[v_x v_y v_z]^T$, $\Omega=[\omega_x \omega_y \omega_z]^T$ – матрицы линейной и угловой скоростей ПА, I – матрица инерции ПА как абсолютно твердого тела.

$$I=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_c & -my_c \\ 0 & m & 0 & -mz_c & 0 & mx_c \\ 0 & 0 & m & my_c & -mx_c & 0 \\ 0 & -mz_c & my_c & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_c & 0 & -mx_c & -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -my_c & mx_c & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

(9)

В случае, если начало связанной системы координат совмещено с центром масс ПА, то координаты его в ней имеют значение $x_c = y_c = z_c = 0$, а так же центробежные моменты $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$. При этих допущениях выражение кинетической энергии существенно упрощается, преобразуясь в сумму кинетической энергии поступательного движения центра масс и вращательного вокруг осей, проходящих через центр масс, а матрица инерции преобразуется в диагональную.

Кинетическая энергия жидкости в общем случае складывается из кинетической энергии

$$dW_B=\frac{1}{2}(v_{Bx}'^2+v_{By}'^2+v_{Bz}'^2)\rho dV+v'_{Bx}(\omega'_{By}z-\omega'_{Bz}y)\rho dV+v'_{By}(\omega'_{Bz}x-\omega'_{Bx}z)\rho dV+$$
$$+v'_{Bz}(\omega'_{Bx}y-\omega'_{By}x)\rho dV+\frac{1}{2}J'_{xx}\omega'^2_{Bx}+\frac{1}{2}J'_{yy}\omega'^2_{By}+\frac{1}{2}J'_{zz}\omega'^2_{Bz}-J'_{xy}\omega'_{Bx}\omega'_{By}-J'_{xz}\omega'_{Bx}\omega'_{Bz}- \quad (11)$$
$$-J'_{yz}\omega'_{By}\omega'_{Bz}$$

Последнее преобразуется к виду, подобному соотношению (8)

$$dW_B = 0.5[v^T \Omega^T] I'_B \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix}$$

, (12)

где I'_B – матрица присоединенных масс и моментов инерции для элементарного объема dV, имеет вид:

$$I'_B = \rho \begin{bmatrix} dV & 0 & 0 & 0 & z_c dV & -y_c dV \\ 0 & dV & 0 & -z_c dV & 0 & x_c dV \\ 0 & 0 & dV & y_c dV & -x_c dV & 0 \\ 0 & -z_c dV & y_c dV & (z^2+y^2)dV & -yxdV & -xzdV \\ z_c dV & 0 & -x_c dV & -xydV & (z^2+x^2)dV & -yzdV \\ -y_c dV & x_c dV & 0 & -xzdV & -yzdV & (x^2+y^2)dV \end{bmatrix}$$

Окончательно кинетическая энергия представляется как [12]:

где V_1 – объем, ограниченный внутренней поверхностью ПА, а V_2 – объем пространства, образованного наружной поверхностью ПА и уходящего в бесконечность. Первое слагаемое определяет инфильтрационное, а второе – возмущённое воздействие жидкости на динамику ПА.

Однако, такое выражение для кинетической энергии жидкости не удобно для общего его представления, поскольку не учитывает скорость движения самого ПА. Полагая, что матрица кинематических параметров ПА, входящая в выражение (8), содержит элементы, которые можно принять в качестве масштабов соответствующих проекций линейных и угловых скоростей, тогда соотношение (8) преобразуются в

$$W_B = 0.5\int_{V_1} [v^T \Omega^T] I_B \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + 0.5\int_{V_2} [v^T \Omega^T] I_B \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} ,$$

$$\lambda'_{11} = \frac{v'^2_x}{v_x^2} * dV ; \lambda'_{22} = \frac{v'^2_y}{v_y^2} * dV ; \lambda'_{33} = \frac{v'^2_z}{v_z^2} * dV ;$$

$$\lambda'_{15} = \frac{v'_x \omega'_y z}{v_x \omega_y} dV ; \lambda'_{14} = 0; \lambda'_{16} = \frac{-v'_x \omega'_z y}{v_x \omega_z} * dV ;$$

$$\lambda'_{24} = \frac{-v'_y \omega'_x z}{v_y \omega_x} dV ; \lambda'_{25} = 0; \lambda'_{26} = \frac{v'_y \omega'_z x}{v_y \omega_z} * dV ;$$

$$\lambda'_{34} = \frac{v'_z \omega'_x y}{v_z \omega_x} * dV ; \lambda'_{35} = \frac{-v'_z \omega'_y x}{v_z \omega_y} dV ; \lambda'_{36} = 0;$$

$$\lambda'_{42} = \frac{-v'_y \omega'_x z}{v_y \omega_x} dV ; \lambda'_{43} = \frac{v'_z \omega'_x y}{v_z \omega_x} dV ; \lambda'_{44} = \frac{\omega'^2_x (y^2+z^2)}{\omega_x^2} dV ;$$

(13)

$$\lambda'_{45} = \frac{-\omega'_x \omega'_y xy}{\omega_x \omega_y} * dV \; ; \lambda'_{46} = \frac{-\omega'_x \omega'_z xz}{\omega_x \omega_z} dV \; ;$$

$$\lambda'_{51} = \lambda'_{15} \; ; \lambda'_{52} = 0; \lambda'_{53} = \lambda'_{35} \; ; \lambda'_{54} = \lambda'_{45} \; ;$$

$$\lambda'_{55} = \frac{\omega'^2_y (x^2 + z^2)}{\omega_y^2} * dV \; ; \lambda'_{56} = \frac{-\omega'_y \omega'_z yz}{\omega_y \omega_z} * dV \; ;$$

$$\lambda'_{61} = \lambda'_{16} \; ; \lambda'_{62} = \lambda'_{26} \; ; \lambda'_{63} = 0; \lambda'_{64} = \lambda'_{46} \; ; \lambda'_{65} = \lambda'_{56} \; ;$$

$$\lambda'_{66} = \frac{\omega'^2_z (x^2 + y^2)}{\omega_z^2} * dV$$

Таким образом, выражение W_B для кинетической энергии ПА и жидкости обобщается

$$W = 0.5[v^T \Omega^T](I_A + I_B^u)\begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} \; ,$$

в котором I_B^u – матрица инерции жидкости в силу свойства суммы матриц содержит элементы

$$\lambda_{ik} = \rho(\int_{v_1} \lambda'_{ik} + \int_{v_2} \lambda'_{ik}) \quad (14)$$

.

Такое представление объясняет зависимость коэффициентов присоединенных масс от условий обтекания, скорости движения ПА, т.к. именно они определяют поле скоростей. Интегральное представление коэффициентов присоединенных масс позволяет получить их численное значение для любого ПА на стадии его проектирования при заданной геометрии легкого корпуса.

Задача об интегральном представлении коэффициентов присоединенных масс и моментов инерции рассматривалась для потенциальных течений несжимаемой жидкости в теории сплошной среды [10]. Полагая, что потенциал скоростей внутри объемов V_1 и V_2 функция непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно, запишем первую формулу Грина [10]

$$\int_V \psi \Delta\varphi dV + \int_V grad\psi grad\varphi dV = \int_S \psi \frac{d\varphi}{dn} dS$$

,

далее полагая, что $\psi = \varphi$ и потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласса получим

$$\int_V |grad\varphi|^2 dV = \int_S \psi \frac{d\varphi}{dn} dS$$

или кинетическая энергия безграничной жидкости равна

$$W = \frac{\rho}{2}\int_V |grad\varphi|^2 dV = \frac{\rho}{2}\int_S \varphi \frac{d\varphi}{dn} dS \quad .$$

Таким образом, элементы матрицы инерции и потенциал скоростей для любого тела, движущегося в безграничной жидкости, определяются соотношениями:

$$\lambda_{ik} = \rho \int_s \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS,$$

$$v = grad\varphi.$$

$$\lambda_{ik} = \rho\left(\int_S \varphi_i^H \frac{\partial \varphi_k^H}{\partial n} dS + \int_S \varphi_i^O \frac{\partial \varphi_k^O}{\partial n} dS + \int_S (\varphi_i^O \frac{\partial \varphi_k^H}{\partial n} + \varphi_k^O \frac{\partial \varphi_i^H}{\partial n}) dS\right).$$

Последнее позволяет свести задачу к решению шести задач Неймана для каждого из потенциалов φ_i^H и φ_i^O, которые независимо от кинематики движения раз и навсегда дают шесть функций потенциалов [10], а, следовательно, и коэффициентов, присоединенных масс и моментов. Однако,

несмотря на простоту выражений, это не дает возможность расчета элементов матрицы тел с плохо обтекаемой формой, порождающей вихри и отрывные струи по данным эксперимента методом ЕГДА, поскольку именно в этих случаях возникают резкие скачки потенциала, следовательно создаются условия для погрешности интегрирования при вычислении коэффициентов присоединенных масс. В этом смысле положительно отличается предложенное представление элементов матрицы через поле скоростей, которое можно определить при моделировании ПА в ходе гидродинамических экспериментов с помощью миниатюрных датчиков скоростей, которые характеризуются погрешностью меньшей одного процента. Тем не менее, следует учитывать, что восстановление по экспериментальным значениям в точках полного поля скоростей и его интегрирование по всему конечному объему приводит к погрешности. Покажем влияние относительных размеров области интегрирования и шага между экспериментальными точками на погрешность определения коэффициентов присоединенных масс на примере сферы, поле скоростей для которой определим точно по [10]. Как показывает анализ данных эксперимента (рис.2) погрешность становится меньше процента при относительных размерах области интегрирования больше пяти, а относительный шаг при этом целесообразно принимать меньше одной сотой.

Интегрирование элементов матрицы инерции I_B возможно только при совместном решении задачи об обтекании корпуса ПА для различных углов крена и дифферента и линейных v и угловых Ω скоростей движения ПА. Последнее на ранних стадиях проектирования затруднено ввиду отсутствия обводов корпуса, поэтому принимают упрощающие допущения о симметрии корпуса ПА, что в свою очередь сводит матрицу инерции к диагональной матрице и упрощает уравнение движения, поскольку

$$m_x = (1 + a_{11})m; \quad m_y = (1 + a_{22})m; \quad m_z = (1 + a_{33})m;$$

$$I_x = (1 + a_{44})I_{xx}; \quad I_y = (1 + a_{55})I_{yy}; \quad I_z = (1 + a_{66})I_{zz};$$

$$a_{22} = a_{33}; \quad a_{55} = a_{66},$$

и, следовательно, $\omega_y L_z - \omega_z L_y = 0$ и $V_y K_z - V_z K_y$

Таким образом

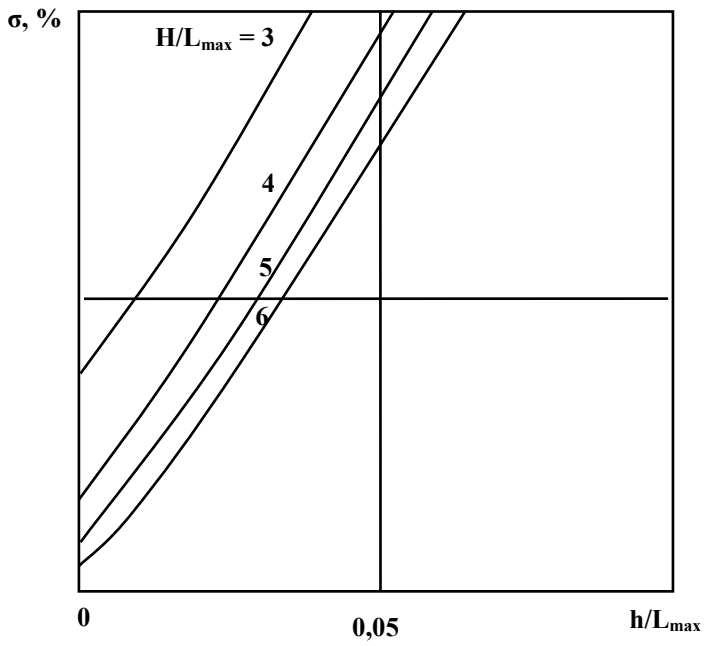

Рис. 2. Зависимость погрешности присоединенных масс от относительного шага интегрирования h/L_{max} и относительно размера области интегрирования H/L_{max}

$$m_x \frac{dv_x}{dt} + m_z \omega_y v_z - m_y \omega_z v_y = R_x,$$

$$m_y \frac{dv_y}{dt} + m_x \omega_z v_z - m_z \omega_x v_z = R_y,$$

$$m_z \frac{dv_z}{dt} + m_y \omega_x v_y - m_x \omega_y v_x = R_z,$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x;$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) + v_x v_z (m_x - m_z) = M_y;$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) + v_x v_y (m_y - m_x) = M_z$$

Однако, упрощения, приведенные выше, не всегда оправданы даже на ранних стадиях проектирования, поскольку форма ПА не является эллипсоидом вращения, а для повышения устойчивости на курсе все ПА имеют развитое кормовое оперение в виде стабилизаторов разного типа, рулей, элеронов. Как показывают результаты работ Пантова Е. Н., Махина Н. Н., Шереметова Б. Б., Лукомского Ю.А. и Чугунова В.С., а так же результаты исследований отделения глубоководной техники НПЦ при НКИ, проводимые проф. Н. Б. Слижевским, Ю. М. Королем, О. Н. Дудченко, А. Н. Вашедченко, Б. П. Иванишиным, А. Г. Чурутой даже для симметричных ПА с легким обтекаемым корпусом статические моменты в матрице присоединенных масс и моментов отличны от нуля. Последнее требует их учета при составлении уравнений динамики ПА. Кроме того, при проектировании технологических ПА следует учитывать влияние стенки на их динамику. Подтверждением этому служат данные эксперимента представленные на рисунке (рис.3). Влияние инфильтрационных процессов продемонстрируем на примере сферы вводя относительные коэффициенты присоединенных масс воспользовавшись их точным значением (одна вторая).Так на (рис.4) представлено влияние относительной площади отверстия на изменение относительных коэффициентов присоединенных масс по трем взаимо ортогональным осям.

С практической точки зрения также важны идеи и методы расчета коэффициентов присоединенных масс и моментов, развиваемые в теории корабля, в частности, излагаемые в работах М. Д. Хаскинда, Ф.Льюиса, А. С. Половицкого, которые в дальнейшем были развиты и обобщены и

$$W = 0.5(m_x v_x^2 + m_y v_y^2 + m_z v_z^2 + I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) + a_{26} v_y \omega_z + a_{35} v_z \omega_y.$$

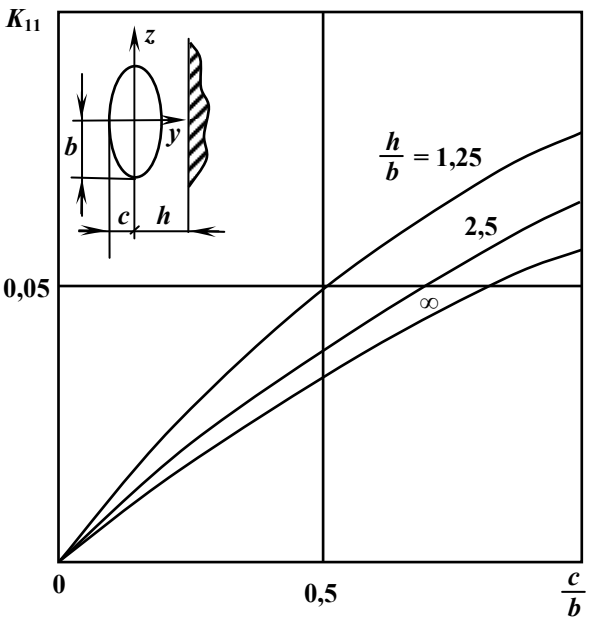

Рис. 3. Зависимость коэффициента присоединенных масс от расстояния до стенки для ПА типа “Скарус”. Расчет по интегральному представлению через поле скоростей

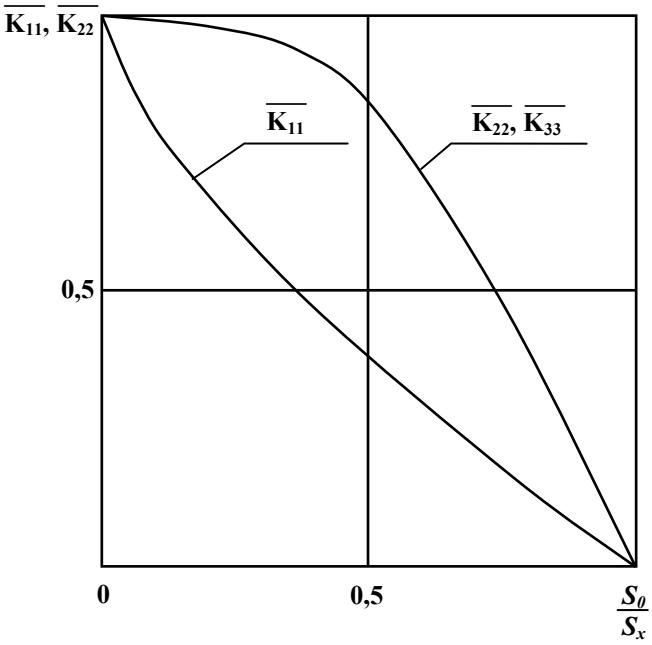

Рис. 4. Зависимость относительного коэффициента присоединенных масс от относительной площади отверстий для ПА сферической формы

Далее в соответствии с общим подходом [12] после дифференцирования кинетической энергии получим уравнение динамики ПА.

$$m_x \frac{dV_x}{dt} + m_z \omega_y v_z - m_y \omega_z v_y + \alpha_{35}\omega_y^2 - \alpha_{26}\omega_z^2 = R_x,$$

$$m_y \frac{dV_y}{dt} + \alpha_{26}\frac{d\omega_z}{dt} + m_x \omega_z v_x - m_z \omega_x v_z + \alpha_{35}\omega_x \omega_y = R_y,$$

$$m_z \frac{dV_z}{dt} + \alpha_{35}\frac{d\omega_y}{dt} + m_y \omega_x v_y - m_x \omega_y v_x + \alpha_{26}\omega_z \omega_z = R_z,$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (\alpha_{26} + \alpha_{35})(\omega_y v_y - \omega_z v_z) = M_x;$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \alpha_{35}\frac{dV_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_x - I_z) + v_x v_z (m_x - m_z) - \alpha_{26}\omega_x v_y - \alpha_{35}\omega_y \omega_x = M_y;$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \alpha_{26}\frac{dV_y}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) + v_x v_y (m_y - m_x) + \alpha_{35}\omega_x v_z + \alpha_{26}\omega_z \omega_x = M_z$$

Таким образом, учет влияния коэффициентов присоединенных масс формально не изменяет вид уравнений движения, при этом влияние инфильтрационных эффектов на динамику ПА возможно учитывать за счет вычисления коэффициентов присоединенных масс по алгоритмам (13)-(15).

Вывод уравнений движения ПА с изменяющейся геометрией корпуса

Покажем, что форма представления данной модели (3) может быть существенно упрощена, если использовать ее запись в виде матриц. Введем вектор-столбец динамических свойств ПА

$$Y = \left[K_x, K_y, K_z, L_x, L_y, L_z\right]^T = \left[K^T L^T\right],$$

в котором компоненты представляют собой проекции импульса и момента импульсов соответственно, а также вектор внешних силовых воздействий

$$B = \left[R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z\right]^T = \left[R^T M^T\right]$$

,

в котором компоненты представляют собой проекции вектора внешних сил и моментов, тогда уравнение динамики ПА может быть записано в виде

$$a_{11} = 0; \quad a_{12} = w_z; \quad a_{13} = -w_y; \quad a_{14} = 0; \quad a_{15} = 0; \quad a_{16} = 0$$

$$a_{21} = -w_z; \quad a_{22} = 0; \quad a_{23} = w_x; \quad a_{24} = 0; \quad a_{25} = 0; \quad a_{26} = 0$$

$$a_{31} = w_y; \quad a_{32} = -w_x; \quad a_{33} = 0; \quad a_{34} = 0; \quad a_{35} = 0; \quad a_{36} = 0$$

$$a_{41} = 0; \quad a_{42} = v_z; \quad a_{43} = -v_y; \quad a_{44} = 0; \quad a_{45} = w_z; \quad a_{46} = -w_y$$

$$a_{51} = -v_z; \quad a_{52} = 0; \quad a_{53} = v_x; \quad a_{54} = -w_z; \quad a_{55} = 0; \quad a_{56} = w_x$$

Воспользовавшись матричным представлением кинетической энергии системы ПА и безграничная несжимаемая жидкость (8) и (10), а именно

после дифференцирования по определению векторов импульса и момента импульса получим соответственные компоненты векторов Y и $\dot{Y}$. Так например, для проекции вектора импульса на ось x

$$K_x = \frac{\partial W}{\partial v_x} = 0{,}5 \cdot [1,0,0,0,0,0] \cdot \left[I + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + 0{,}5 \cdot [v^T \Omega^T] \cdot \left[I + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

и соответственно для скорости изменения вектора импульса

$$\frac{dK_x}{dt} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial v_x} = 0{,}5 \cdot [1,0,0,0,0,0] \cdot \left[I + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + 0{,}5 \cdot [\dot{v}^T \ \dot{\Omega}^T] \cdot \left[I + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом последнего преобразуем уравнение движения центра масс ПА спроектировав его на соответствующие оси

$$[1,0,0,0,0,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = [0, w_z, -w_y, 0,0,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + R_x$$

$$[0,1,0,0,0,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = [-w_z, 0, w_x, 0,0,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + R_y$$

$$[0,0,1,0,0,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = [w_y, -w_x, 0,0,0,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + R_z$$

$$[0,0,0,1,0,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = [0, v_z, -v_y, 0, w_z, -w_y] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + M_x$$

$$[0,0,0,0,1,0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = [-v_z, 0, v_x, -w_z, 0, w_x] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + M_y$$

$$[0,0,0,0,0,1] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = [v_y, -v_x 0, w_y, -w_x, 0] \cdot \left[I_A + I_B{}' \right] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \Omega \end{bmatrix} + M_z$$

После соответствующих преобразований уравнение (18) представится в виде

$$[e]\cdot\left[I_A+I_B{}'\right]\cdot\begin{bmatrix}\dot{v}\\ \dot{\Omega}\end{bmatrix}=[A]\cdot\left[I_A+I_B{}'\right]\cdot\begin{bmatrix}v\\ \Omega\end{bmatrix}+[B]$$

, (20)

где $[e]$ – единичная матрица шестого порядка.

В случае переменной геометрии ПА уравнения (19) перепишутся в виде

$$[e]\cdot\left\{\left[\dot{I}_A+\dot{I}_B{}'\right]\cdot\begin{bmatrix}v\\ \Omega\end{bmatrix}+\left[I_A+I_B{}'\right]\cdot\begin{bmatrix}\dot{v}\\ \dot{\Omega}\end{bmatrix}\right\}=[A]\cdot\left[I_A+I_B{}'\right]\cdot\begin{bmatrix}v\\ \Omega\end{bmatrix}+[B]$$

Тогда с учетом последнего (20) соответственно преобразуются

Наиболее удобным для дальнейшего анализа является представление уравнений движения ПА в матричной форме. Фигурирующие в нем члены позволяют оценить соотношение их величин стандартным алгоритмом вычисления произведения матриц, благодаря чему представляется возможным производить оценку их величины в режиме автоматизированного проектирования для заданных кинематических параметров.

Выводы:

1. Динамическое поведение подводных аппаратов, обладающих легким проницаемым корпусом, существенно зависят от инфильтрационных процессов.
2. Динамическое изменение геометрии корпуса подводного аппарата изменяет не только матрицы инерции и гидродинамических сил, но и структуру уравнения движения.
3. Оценка влияния динамического изменения характеристик корпуса подводного аппарата на его динамику может быть осуществлена на основе сравнения оценок решений уравнений (20) и (21).

Література

1. А.И. Ефимов, Б.П. Иванишин, В.С. Комаров, В.В. Мороз, А.П. Родичев. Экспериментальная оценка инфильтрации, Проектирование подводных аппаратов. Сб. Научных Трудов, Николаев 1990, с.19-24.
2. А.И. Короткин Присоединеные массы судна, Л., Судостроение, 1986, с.308.
3. Блинцов В.С. Привязные подводные системы. Киев: Наукова Думка, 1998. – 231 с.
4. Король Ю.М. Уравнение движения телеуправляемых подводных аппаратов. – Зб. Наукових праць УДМТУ № 2, Миколаїв, 2002. – с. 16-25.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т.1, Механика. М.: Наука, 1988. – 215 с.
6. Лукомский Ю.А., Чугунов В.С. Системы управления морскими подвижными объектами. – Л.: изд. Судостроение, 1988. – с. 272.
7. М.В. Войлошников, Т.С. Ишназаров Перспективы развития много корпусных подводных аппаратв, Проектирование подводных аппаратов. Сб.Научных Трудов, Николаев 1990, с. 24-30
8. М.Д. Хаскинд Гидродинамическая теория качкикорабля, изд. Наука, М. 1973,с.327.
9. Поддубный В.И., Шамарин Ю.Е., Черненко Д.А., Астахов А.С. Динамика подводных буксируемых систем. Санкт-Петербург: Судостроение. –200 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т.2. М.: Наука, 1984. – 560 с.
11. Слижевский Н.Б. Ходкость и управляемость подводных технических средств. - Николаев, 1998. – с. 148.
12. Trounov A.N. Submersible mathematical model Allowing for dymamic properties of controling systems. Proc. International Conferenc, Inter Ocentechnology-90. 10 c

Автор выражает искреннею благодарность профессору, доктору технических наук Леониду Михайловичу Дыхте, чьи советы и критические замечания стимулировали настоящее исследование.