Мещанінов Олександр Павлович – к.т.н., доцент, перший проректор МФ НаУКМА.Сфера наукових інтересів – це математичне моделювання систем з динамічною структурою. Закінчив у 1973 році Миколаївський кораблебудівний інститут, факультет електрообладнання суден. У 1977 році у м.Києві в інституті електродинаміки захистив дисертацію кандидата технічних наук за темою “Розробка методу та ефективних алгоритмів для аналізу процесів в системах збудження з вентильними перетворювачами”. З 1977 р. по 1991р. очолював низку наукових проектів по розробці та використанню спеціалізованого математичного забезпечення досліджень режимів роботи складних електромеханічних систем з перетворювачами енергії за замовленнями провідних наукових центрів.

УДК 681.3 : 16

Мещанінов О.П.

Математична модель для дослідження електроенергетичних установок з синхронними машинами

При проведенні практичних розрахунків режимів роботи електроенергетичних установок (ЕЕУ) необхідно мати математичну модель синхронної машини як основного джерела електричної енергії та значення її параметрів.

Вибір чи створення математичної моделі синхронної машини визначається метою проведення розрахунків та базується на вводжуваних допущеннях. Практична цінність будь-якої математичної моделі полягає у вірогідності її параметрів. У паспортних чи каталожних даних наводять значення обмеженої кількості параметрів, виражених у найбільш розповсюдженій взаємній системі відносних одиниць, що називається інакше системою x_{ad} [1].

Матричне рівняння синхронної машини для електричних контурів в осях *odq* у відносних одиницях x_{ad} представлено рівнянням (1)

$$
\boldsymbol{U}_{odq} = \boldsymbol{R}_{в.о} \cdot \boldsymbol{I}_{odq} + \boldsymbol{X}_{odq} \cdot \frac{d\boldsymbol{I}_{odq}}{d\tau} +
+ \boldsymbol{G}_{odq} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_{odq}, \qquad (1)
$$

де $\boldsymbol{U}_{odq}, \boldsymbol{I}_{odq}$ – вектори напруги і струму контурів синхронної машини в осях odq; $\boldsymbol{R}_{в.о.}$ – діагональна матриця активних опорів обмоток; $\boldsymbol{X}_{odq}$ – матриця індуктивних параметрів; $\boldsymbol{G}_{odq}$ – матриця моментів синхронної машини; $d\boldsymbol{I}_{odq}/d\boldsymbol{\tau}$ – вектор перших похідних від струмів синхронної машини в осях odq.

У розгорнутому вигляді рівняння (1) наведено виразом (2),

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{u}_d \\ \boldsymbol{u}_q \\ \boldsymbol{u}_f \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =
\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_s & & & & & \\ & \boldsymbol{r}_s & & & & \\ & & \boldsymbol{r}_s & & & \\ & & & \boldsymbol{r}_f & & \\ & & & & \boldsymbol{r}_{d1} & \\ & & & & & \boldsymbol{r}_{q1} \end{vmatrix} \cdot
\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_0 \\ \boldsymbol{i}_d \\ \boldsymbol{i}_q \\ \boldsymbol{i}_f \\ \boldsymbol{i}_{d1} \\ \boldsymbol{i}_{q1} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & & & & & \\ & \boldsymbol{x}_d & & \boldsymbol{x}_{ad} & \boldsymbol{x}_{ad} & \\ & & \boldsymbol{x}_q & & & \boldsymbol{x}_{aq} \\ & \boldsymbol{x}_{ad} & & \boldsymbol{x}_f & \boldsymbol{x}_{ad} & \\ & \boldsymbol{x}_{ad} & & \boldsymbol{x}_{ad} & \boldsymbol{x}_{d1} & \\ & & \boldsymbol{x}_{aq} & & & \boldsymbol{x}_{q1} \end{vmatrix} \cdot \frac{d}{d\tau}
\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_0 \\ \boldsymbol{i}_d \\ \boldsymbol{i}_q \\ \boldsymbol{i}_f \\ \boldsymbol{i}_{d1} \\ \boldsymbol{i}_{q1} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} & & & & & \\ & & \boldsymbol{x}_q & & & \boldsymbol{x}_{aq} \\ & -\boldsymbol{x}_d & & -\boldsymbol{x}_{ad} & -\boldsymbol{x}_{ad} & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot
\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_0 \\ \boldsymbol{i}_d \\ \boldsymbol{i}_q \\ \boldsymbol{i}_f \\ \boldsymbol{i}_{d1} \\ \boldsymbol{i}_{q1} \end{vmatrix}, \quad (2)
$$

де $\boldsymbol{x}_0$ – індуктивний опір нульової послідовності статора; $\boldsymbol{x}_{ad}, \boldsymbol{x}_{aq}$ – індуктивні опори реакції якоря відповідно по поздовжній та поперечній осям; $\boldsymbol{x}_d=\boldsymbol{x}_{ad}+\boldsymbol{x}_{ss}$ – повний індуктивний опір по поздовжній осі; $\boldsymbol{x}_q=\boldsymbol{x}_{aq}+\boldsymbol{x}_{ss}$ – повний індуктивний опір по поперечній осі; $\boldsymbol{x}_{ss}$ – індуктивний опір розсіяння статорних контурів; $\boldsymbol{x}_f=\boldsymbol{x}_{ad}+\boldsymbol{x}_{sf}$ – повний індуктивний опір обмотки збудження; $\boldsymbol{x}_{d1}=\boldsymbol{x}_{ad}+\boldsymbol{x}_{sd1}$ – повний індуктивний опір демпферної обмотки по поздовжній осі; $\boldsymbol{x}_{q1}=\boldsymbol{x}_{aq}+\boldsymbol{x}_{sq1}$ – повний індуктивний опір демпферної обмотки по поперечній осі; $\boldsymbol{x}_{sf}, \boldsymbol{x}_{sd1}, \boldsymbol{x}_{sq1}$ – приведені індуктивні опори розсіяння роторних контурів; $\boldsymbol{r}_s$ – активний опір статорних контурів; $\boldsymbol{r}_f, \boldsymbol{r}_{d1}, \boldsymbol{r}_{q1}$ – приведені активні опори роторних контурів; $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{u}_q$ – напруги статорних контурів у осях odq; $\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{i}_d, \boldsymbol{i}_q$ – струми статорних контурів у осях odq; $\boldsymbol{u}_f$ – приведена напруга на обмотці збудження; $\boldsymbol{i}_f, \boldsymbol{i}_{d1}, \boldsymbol{i}_{q1}$ – приведені струми роторних контурів; $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}_б$ – час, рад (t – час, с); $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}/\boldsymbol{\omega}_б$ – кутова швидкість обертання ротора, в.о.; $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість обертання ротора, рад/с.

Для статорних контурів і для приведених до статора роторних контурів прийняті такі базисні одиниці: $U_б$=Ц2·$U_{ф.н.}$ – амплітуда номінальної фазної статорної напруги, В; $I_б$=Ц2·$I_{ф.н.}$ – амплітуда номінального фазного статорного струму, А; $S_б=3/2\cdot U_б I_б$ – повна трифазна потужність, ВЧА; $Z_б=U_б/I_б$ – опір, Ом; □$_б$=□$_s$ – кутова синхронна швидкість, рад/с; $M_б=P_б/$□$_s$ – обертаючий момент, відповідний активній потужності при кутовій синхронній швидкості ротора □$_s$($S_б=P_б$); $t_б=1/$□$_s$ – час, впродовж якого при синхронній швидкості ротора □$_s$ досягається зміна кута в один радіан.

Щоб математична модель синхронного генератора не залежала від номінальних швидкостей агрегату, розглядаємо ***електричний кут повороту*** □=p□ – приведений електричний кут повороту; □ – кут повороту ротора; p – кількість пар полюсів та ***електричну швидкість*** □=p□$_м$ – приведену кутову швидкість; □$_м$=d□/dt – кутова механічна швидкість ротора .

Кут □, утворений осями d ротора і фази a статора, є функцією часу:

$$
\theta = \int_0^t \omega dt + \theta_0; \qquad (3)
$$
$$
d\theta / dt = \omega,
$$

де $\boldsymbol{\theta_0}$ – кут, від якого починається відрахунок часу.

Виключивши різницю між геометричним та електричним кутами, у подальшому наведемо рівняння для двополюсної машини, а для переходу до багатополюсних зменшимо швидкість обертання та збільшимо момент у відповідності із кількістю пар полюсів машини.

При розрахунках перехідних процесів безпосереднє використання заводських параметрів, що звичайно наводяться у каталогах, не завжди можливе. Доводиться на підставі каталожних даних та наближених схем заміщення визначати індуктивності розсіяння та активні опори роторних контурів. У каталогах суднових синхронних генераторів, як правило, наводять деякі з таких параметрів у в.о.: X_d, X'_d, X''_d – індуктивні опори по осі d: синхронний, перехідний та надперехідний; X_q, X'_q, X''_q – індуктивні опори по вісі q: синхронний, перехідний та надперехідний; T'_d, T''_d – постійні часу перехідних процесів по осі d: перехідна та надперехідна, с; T'_q, T''_q – постійні часу перехідних процесів по осі q: перехідна та надперехідна, с; T_f, T_D, T_Q – постійні часу роторних контурів, с; T'_{d0}, T''_{d0}, T'_{q0}, T''_{q0} – перехідні та надперехідні постійні часу по осям d і q відповідно, а індекс 0 вказує, що параметри визначені при всіх розімкнутих інших контурах генератора.

Приведені до статора індуктивні опори розсіяння роторних контурів визначають за рівняннями:

$$x_{sf}=\frac{x_{ad}\left(x'_d-x_{ss}\right)}{x_d-x'_d};\qquad x_{sd1}=\frac{\left(x'_d-x_{ss}\right)\left(x''_d-x_{ss}\right)}{x'_d-x''_d};$$

$$x_{sq1}=\frac{x_{aq}\left(x'_q-x_{ss}\right)}{x_q-x'_q}.$$

Приведені до статора активні опори роторних контурів можна обчислити за наступними рівняннями:

$$r_f\approx\frac{x'_d\,x_{ad}^2}{\omega_s T'_d\,x_d\left(x_d-x'_d\right)};$$

$$r_{d1}\approx\frac{x''_d\left(x'_d-x_{ss}\right)^2}{\omega_s T''_d\,x'_d\left(x'_d-x''_d\right)};$$

$$r_{q1}\approx\frac{x'_q\,x_{aq}^2}{\omega_s T'_q\,x_q\left(x_q-x'_q\right)},$$

або

$$r_{q1}\approx\frac{x''_q\left(x'_q-x_{ss}\right)^2}{\omega_s T''_q\,x'_q\left(x'_q-x''_q\right)}.$$

Якщо відомі постійні часу роторних контурів T_f, T_D, T_Q, то приведені до статора активні опори роторних контурів можна обчислити за рівняннями:

$$r_{q1}=\frac{x_{q1}}{\omega_s T_Q}=\frac{x_{aq}+x'_{sq1}}{\omega_s T_Q};\quad r_f=\frac{x_f}{\omega_s T_f}=\frac{x_{ad}+x'_{sf}}{\omega_s T_f};$$

$$r_{d1}=\frac{x_{d1}}{\omega_s T_D}=\frac{x_{ad}+x'_{sd1}}{\omega_s T_D}.$$

Якщо постійні часу роторних контурів T_f, T_D, T_Q невідомі, тоді їх можна знайти із наступних рівнянь:

$$T'_{d0}\approx T_f+T_D;\;T''_{d0}\approx\left(1-\frac{x_{ad}^2}{x_f x_{d1}}\right)\cdot\frac{T_f\cdot T_D}{T_f+T_D};$$

$$T'_{d0}\approx\frac{x_d}{x'_d}T'_d;\qquad T''_{d0}\approx\frac{x'_d}{x''_d}T''_d;$$

$$T'_{q0}\approx\frac{x_q}{x'_q}T'_q;\qquad T''_{q0}\approx\frac{x'_q}{x''_q}T''_q.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно шуканих T_f та T_D, отримуємо

$$T_D^2-T'_{d0}\cdot T_D+\frac{T'_{d0}\cdot T''_{d0}\cdot x_f\cdot x_{d1}}{x_f\cdot x_{d1}-x_{ad}^2}=0;$$

$$T_f=T'_{d0}-T_D.$$

Математична модель синхронної машини включає диференційні рівняння руху ротора, в.о.,

$$T_j\cdot\frac{d\Omega}{d\tau}=M_{пр}+M_{ем}-D_j\cdot\Omega,\tag{4}$$

де

$T_j=\dfrac{J\cdot\omega_б}{M_б}=\dfrac{J\cdot\omega_б^2}{P_б}$ – механічна постійна часу;

$D_f=\dfrac{D\cdot\omega_б}{M_б}$ – механічна постійна демпфування;

D, J – коефіцієнти, що визначаються механічним демпфуванням та інерцією; $M_{пр}$ – обертаючий момент приводного двигуна; $M_{ем}$–гальмовий електромагнітний момент генератора:

$$M_{ем}=-x_{ad}i_q\left(i_d+i_f+i_{d1}\right)+$$
$$+x_{aq}i_d\left(i_q+i_{q1}\right).\tag{5}$$

Оскільки *d□/dt=□*, то у відносних одиницях можна записати

$$\frac{d\theta}{d(t\omega_б)}=\frac{\omega}{\omega_б},$$

або

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\Omega.\tag{6}$$

Таким чином, синхронна машина описується у вісях *odq* у відносних одиницях такою системою рівнянь:

- матричним диференційним рівнянням (2) для електричної частини машини;
- інтегральним рівнянням (3) та двома диференційними рівняннями (4), (6) для механічної частини машини;
- алгебраїчним рівнянням взаємозв'язку механічної та електричної частин машини для визначення електромагнітного моменту (5).

До безперечних переваг розгляданої моделі синхронної машини слід віднести, по-перше, порівняну простоту моделі, по-друге, можливість аналітичного розв'язку. Однак повна математична модель ЕЕУ, що дозволяє досліджувати і несиметричні режими, роботу генератора на різноманітного роду споживачів з імпульсно-циклічним характером навантаження, математичні моделі яких представлені у різних фазних осях, потребує створення рівнянь зв'язку.

Звичайно перетворення трифазних змінних *a, b, c* у змінні *o, d, q*, вперше отримані Парком, включають множник 2/3, тоді як використовані у подальшому перетворення [2] включають множник Ц(2/3). Головна перевага такого перетворення у тому, що матриці перетворень струмів та напруг співпадають, матриці опорів симетричні та потужність синхронної машини інваріантна відносно перетворення.

Для синхронної машини із демпферними контурами по поздовжній та поперечній осях рівняння зв'язку між векторами струму $\boldsymbol{I}$ та напруги $\boldsymbol{U}$ у фазних осях та векторами струму $\boldsymbol{I}_{odq}$ та напруги $\boldsymbol{U}_{odq}$ в обертових осях *odq*, пов'язаних із ротором синхронної машини, має такий вигляд:

$$\boldsymbol{I}_{odq} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{I}; \qquad \boldsymbol{U}_{odq} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{U}, \tag{7}$$

де $\boldsymbol{AP}$ – матриця перетворення координат:

$$\boldsymbol{AP} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \cos(\theta-\rho) & \cos(\theta+\rho) & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \sin(\theta-\rho) & \sin(\theta+\rho) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix};$$

ρ – кут між сусідніми фазами статора, який складає $2\pi/3$ електричних радіанів або $(2\pi/3)$ $(1/p)$ механічних радіанів.

Обернене перетворення для струмів та напруг описується рівняннями

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \boldsymbol{I}_{odq}; \ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \boldsymbol{U}_{odq}, \tag{8}$$

де $\boldsymbol{AP}^{t} = \boldsymbol{AP}^{-1}$ – транспонована та обернена матриця перетворення координат.

Матриці перетворення координат, пряма $\boldsymbol{AP}$ та обернена $\boldsymbol{AP}^{-1}$, повністю задовольняють інваріант-ності потужності синхронної машини при перетворенні від нерухомих осей до обертових і навпаки. Вони побудовані таким чином, що перетворення струмів та напруг однакові, а кількість витків двофазних обмоток, розташованих по осях *d* і *q*, у Ц(3/2) більша, ніж трифазних [2].

Наведені рівняння зв'язку (7), (8) між векторами струму та напруги у різних координатних осях є алгебраїчними рівняннями. Однак коефіцієнти матриці перетворення $\boldsymbol{AP}$ є періодичними функціями кута □. Це необхідно враховувати при обчисленні перших похідних від струмів синхронної машини в осях *abc*. Продиференціюємо перше з рівнянь (8):

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{d\tau} = \frac{d(\boldsymbol{AP}^{t} \cdot \boldsymbol{I}_{odq})}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{AP}^{t}}{d\tau} \cdot \boldsymbol{I}_{odq} + \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \frac{d\boldsymbol{I}_{odq}}{d\tau},$$

або

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{AP}^{t}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\tau} \cdot \boldsymbol{I}_{odq} + \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \frac{d\boldsymbol{I}_{odq}}{d\tau}.$$

Отримуємо

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{AP}^{t}}{d\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_{odq} + \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \frac{d\boldsymbol{I}_{odq}}{d\tau}. \tag{9}$$

Отримане рівняння (9) є диференційним рівнянням зв'язку між векторами перших похідних від струмів синхронної машини обертових та нерухомих координатних осях, в.о. [3].

Аналізуючи рівняння (9), можна встановити, що перша складова визначає ту складову у похідній струму, котра визначена її синусоїдальним характером і відповідає кутовій швидкості обертання ротора □. Друга складова визначає ту, що характерна лише для перехідних процесів, коли вектор $\boldsymbol{dI_{odq}/d}$□ не рівний нулю.

Диференційне рівняння зв'язку (9) використовується лише тоді, коли після розв'язування рівняння (1) обчислення нових значень струмів здійснюється у фазних осях. Однак рівняння (1), (9) можна об'єднати. Із цією метою запишемо матричне рівняння синхронної машини у фазних осях у фізичній системі одиниць

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{I} + \frac{d\psi}{dt}, \tag{10}$$

де $\psi = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I}$ – вектор потокозчеплень; $\boldsymbol{R}$ – матриця активних опорів обмоток; $\boldsymbol{L}$ – матриця коефіцієнтів само- та взаємоіндукції контурів синхронної машини.

Враховуючи, що

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{I})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}\frac{d\boldsymbol{I}}{dt},$$

а елементи матриці $\boldsymbol{L}$ є функціями кута □, тобто

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{L}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

рівняння (10) приводимо до такого вигляду:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{I} + \frac{d\boldsymbol{L}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}\cdot\frac{d\boldsymbol{I}}{dt},$$

або

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}\cdot\frac{d\boldsymbol{I}}{dt} + \boldsymbol{M}\cdot\omega\cdot\boldsymbol{I}, \qquad (11)$$

де $\boldsymbol{M}=d\boldsymbol{L}/d\theta$ – матриця похідних від коефіцієнтів само- та взаємоіндукції.

Помноживши рівняння (11) на матрицю перетворення зліва та враховуючи, що $\boldsymbol{AP}^t\cdot\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{E}$, де $\boldsymbol{E}$ – одинична матриця, отримуємо

$$\boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{AP}^t\cdot\boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{I} +$$

$$+\boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{AP}^t\cdot\boldsymbol{AP}\cdot\frac{d\boldsymbol{I}}{dt} + \boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{AP}^t\cdot\boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\omega.$$

Введемо позначення

$$U'_{odq} = AP\cdot U; \qquad I'_{odq} = AP\cdot I;$$

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{AP}^t; \qquad \boldsymbol{L}'_{odq} = \boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{AP}^t;$$

$$\boldsymbol{M}'_{odq} = \boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{AP}^t,$$

де $\boldsymbol{U}'_{odq}$, $\boldsymbol{I}'_{odq}$ – вектори напруги та струму; $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}$ – діагональна матриця активних опорів обмоток; $\boldsymbol{L}'_{odq}$ – матриця коефіцієнтів само- та взаємоіндукції обмоток; $\boldsymbol{M}'_{odq}$ – матриця похідних від коефіцієнтів само- та взаємоіндукції обмоток. Усі величини подані у фізичній системі одиниць та осях *odq*.

Використовуючи введені позначення, отримуємо

$$\boldsymbol{U}'_{odq} = \boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{I}'_{odq} + \boldsymbol{L}'_{odq}\cdot\boldsymbol{AP}\frac{d\boldsymbol{I}}{dt} +$$

$$+\boldsymbol{M}'_{odq}\cdot\boldsymbol{I}'_{odq}\cdot\omega. \qquad (12)$$

Прості співвідношення між індуктивними опорами синхронної машини отримуються, якщо оперувати не дійсними, а приведеними до обмотки статора величинами ротора. Процес приведення роторних ланцюгів до статорних еквівалентний процесу застосування лінійних перетворень для струмів та напруг

$$\boldsymbol{U}^*_{odq} = \boldsymbol{AU}\cdot\boldsymbol{U}'_{odq}; \quad \boldsymbol{I}^*_{odq} = \boldsymbol{AI}\cdot\boldsymbol{I}'_{odq}, \qquad (13)$$

де $\boldsymbol{U}'_{odq}$, $\boldsymbol{I}'_{odq}$ – вектори напруги та струму в осях *odq* у фізичній системі одиниць, із приведеними до обмотки статора величинами ротора; $\boldsymbol{AI}$ та $\boldsymbol{AU}$ – матриці приведення струмів та напруг,

$$\boldsymbol{AI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\boldsymbol{K}_{if} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\boldsymbol{K}_{id1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\boldsymbol{K}_{iq1} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{AU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{uf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{ud1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{uq1} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{K}_{if} = \boldsymbol{K}_{uf} = \boldsymbol{K}_{f1} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{3/2}W_1}{W_f}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_{об1}\cdot\boldsymbol{K}_d}{\boldsymbol{K}_{обf}\cdot\boldsymbol{K}_f}$$

– коефіцієнт приведення струму (напруги) збудження до струму (напруги) статора; $\boldsymbol{K}_f$ – коефіцієнт форми поля збудження; $\boldsymbol{K}_d$ – коефіцієнт форми поля поздовжньої реакції; $\boldsymbol{K}_{об.f}$ – обмоточний коефіцієнт обмотки збудження; $\boldsymbol{K}_{об.1}$ – обмоточний коефіцієнт обмотки статора; $\boldsymbol{W}_1$ – кількість витків фази статора трифазної синхронної машини; **Ц(3/2)** – коефіцієнт приведення, що виникає при перетворенні трифазної обмотки у двофазну; $\boldsymbol{2p}$ – кількість полюсів синхронної машини; $\boldsymbol{4/\pi}$ – коефіцієнт розкладення в ряд Фур'є кривої магніторушійної сили

$$\boldsymbol{K}_{id1} = \boldsymbol{K}_{ud1} = \boldsymbol{K}_{d1} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{3/2}W_1}{m_{d1}W_{d1}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_{об1}\cdot\boldsymbol{K}_d}{\boldsymbol{K}_{обd1}},$$

– те ж для демпферної обмотки по поздовжній осі;

$$\boldsymbol{K}_{iq1} = \boldsymbol{K}_{uq1} = \boldsymbol{K}_{q1} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{3/2}W_1\cdot\boldsymbol{K}_{об1}\cdot\boldsymbol{K}_q}{m_{q1}W_{q1}\cdot\boldsymbol{K}_{обq1}},$$

– те ж для поперечної осі; $\boldsymbol{K}_q$ – коефіцієнт форми поля поперечної реакції; $\boldsymbol{W}_{d1}=\boldsymbol{W}_{q1}=1/2$ – кількість витків у фазі демпферних обмоток; $\boldsymbol{W}_f$ – кількість витків обмотки збудження; $\boldsymbol{K}_{обd1}=\boldsymbol{K}_{обq1}=1$ – обмоточні коефіцієнти білячої клітки; $\boldsymbol{m}_{d1}$, $\boldsymbol{m}_{q1}$ – кількість фаз демпферних обмоток, рівна кількості пазів на полюс $\boldsymbol{N}_{d1}$ та $\boldsymbol{N}_{q1}$ відповідно.

Застосовуючи рівняння (13) до рівняння (12), знаходимо

$$\boldsymbol{AU}\cdot\boldsymbol{U}'_{odq} = \boldsymbol{AU}\cdot\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{AI}^{-1}\cdot\boldsymbol{AI}\cdot\boldsymbol{I}'_{odq} +$$

$$+\boldsymbol{AU}\cdot\boldsymbol{L}'_{odq}\cdot\boldsymbol{AI}^{-1}\cdot\boldsymbol{AI}\cdot\boldsymbol{AP}\cdot\frac{d\boldsymbol{I}}{dt} +$$

$$+\boldsymbol{AU}\cdot\boldsymbol{M}'_{odq}\cdot\boldsymbol{AI}^{-1}\cdot\boldsymbol{AI}\cdot\boldsymbol{I}'_{odq}\cdot\omega,$$

або

$$\boldsymbol{U^*_{odq} = R^* \cdot I^*_{odq} + L^*_{odq} \cdot AP \cdot \frac{d(AI \cdot I)}{dt} +} \quad (14)$$

$$\boldsymbol{+ M^*_{odq} \cdot I^*_{odq} \cdot \omega,}$$

де

$$\boldsymbol{R^* = AU \cdot R' \cdot AI^{-1}};$$

$$\boldsymbol{L^*_{odq} = AU \cdot L'_{odq} \cdot AI^{-1}};$$

$$\boldsymbol{M^*_{odq} = AU \cdot M'_{odq} \cdot AI^{-1}}.$$

Зауважимо, що матриця $\boldsymbol{AI}$ є діагональною і елементи її не залежать від часу. Тому справедливо

$$\boldsymbol{AI \cdot AP \cdot \frac{dI}{dt} = AP \cdot AI \cdot \frac{dI}{dt} =}$$

$$\boldsymbol{= AP \cdot \frac{d(AI \cdot I)}{dt} = AP \cdot \frac{dI^*}{dt}},$$

де $\boldsymbol{I^*=AI \cdot I}$ – вектор струмів синхронної машини в фазних осях у фізичній системі одиниць із приведеними струмами роторних контурів до статорних.

Тоді матричне рівняння (14) приймає вигляд

$$\boldsymbol{U^*_{odq} = R^* \cdot I^*_{odq} + L^*_{odq} \cdot AP \cdot \frac{dI^*}{dt} +}$$

$$\boldsymbol{+ M^*_{odq} \cdot I^*_{odq} \cdot \omega.} \quad (15)$$

Оскільки всі обмотки ротора приведені до обмотки статора, то, використовуючи для статорних і для приведених до статора роторних ланцюгів єдині базисні одиниці, матричне рівняння (15) можна перетворити в такому порядку. Розділимо матричне рівняння (15) на $U_б$

$$\boldsymbol{\frac{U^*_{odq}}{U_б} = \frac{R^* \cdot I^*_{odq}}{U_б} + \frac{L^*_{odq}}{U_б} \cdot AP \cdot \frac{dI^*}{dt} +}$$

$$\boldsymbol{+ \frac{M^*_{odq}}{U_б} \cdot I^*_{odq} \cdot \omega.}$$

Оскільки $U_б=Z_б I_б$, то перепишемо

$$\boldsymbol{\frac{U^*_{odq}}{U_б} = \frac{R^* \cdot I^*_{odq}}{Z_б \cdot I_б} + \frac{L^*_{odq} \cdot \omega_б}{Z_б} \cdot AP \times}$$

$$\boldsymbol{\times \frac{d(I^*/I_б)}{d(t\omega_б)} + \frac{M^*_{odq} \cdot \omega_б}{Z_б} \cdot \frac{I^*_{odq}}{I_б} \cdot \frac{\omega}{\omega_б}}.$$

Введемо позначення

$$\boldsymbol{U_{odq} = U^*_{odq} / U_б;\ \ I_{odq} = I^*_{odq} / I_б;\ \ I_{в.о.} = I^* / I_б;}$$

$$\boldsymbol{R_{в.о.} = R^* / Z_б;\ \ X_{odq} = (L^*_{odq} \cdot \omega_б) / Z_б;}$$

$$\boldsymbol{XM_{odq} = (M^*_{odq} \cdot \omega_б) / Z_б}.$$

З урахуванням введених позначень отримуємо гібридне матричне рівняння синхронної машини, в.о. [3].

$$\boldsymbol{U_{odq} = R_{в.о.} \cdot I_{odq} + X_{odq} \cdot AP \cdot \frac{dI_{в.о.}}{d\tau} +}$$

$$\boldsymbol{+ XM_{odq} \cdot \Omega \cdot I_{odq}}.$$

(16)

Матричне рівняння (16) у розгорнутому вигляді можна записати рівнянням (17). При використанні неоднорідних форм математичного описання об’єктів в технічній літературі прийнято використовувати термін “гібридні” рівняння. У цьому розумінні його вжито і у цій праці, так як одна частина елементів рівняння перетворюється до обертаючих осей odq, а інша

$$\left|\begin{matrix} u_0 \\ u_d \\ u_q \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| = \begin{bmatrix} r_s &&&&& \\ & r_s &&&& \\ && r_s &&& \\ &&& r_f && \\ &&&& r_{d1} & \\ &&&&& r_{q1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left|\begin{matrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{d1} \\ i_{q1} \end{matrix}\right| + \begin{bmatrix} x_0 &&&&& \\ & x_d && x_{ad} & x_{ad} & \\ && x_q &&& x_{aq} \\ & x_{ad} && x_f & x_{ad} & \\ & x_{ad} && x_{ad} & x_{d1} & \\ && x_{aq} &&& x_{q1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} &&& \\ \cos(\Omega\tau) & \cos(\Omega\tau - \rho) & \cos(\Omega\tau + \rho) &&& \\ \sin(\Omega\tau) & \sin(\Omega\tau - \rho) & \sin(\Omega\tau + \rho) &&& \\ &&& \sqrt{\frac{3}{2}} && \\ &&&& \sqrt{\frac{3}{2}} & \\ &&&&& \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \times$$

$$\frac{d}{d\tau} \left|\begin{matrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_{d1} \\ i_{q1} \end{matrix}\right| + \begin{bmatrix} &&&&& \\ && x_{aq} - x_{ad} &&& x_{aq} \\ & x_{aq} - x_{ad} && -x_{ad} & -x_{ad} & \\ && -x_{ad} &&& \\ && -x_{ad} &&& \\ & x_{aq} &&&& \end{bmatrix} \Omega \left|\begin{matrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{d1} \\ i_{q1} \end{matrix}\right|.$$

залишається не перетвореною у фазних осях.

(17)

Порівнюючи рівняння (2) і (17), необхідно відмітити, що для обчислення вектора перших похідних від струмів синхронної машини у фазних осях досить перетворити рівняння (16) до вигляду [3]:

$$\frac{d\boldsymbol{I}_{в.о.}}{d\tau} = \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \boldsymbol{X}_{odq}^{-1} \times$$
$$\times(\boldsymbol{U}_{odq} - \boldsymbol{R}_{в.о.}\boldsymbol{I}_{odq} - \boldsymbol{XM}_{odq} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_{odq}). \quad (18)$$

Аналітичний вираз матриці $\boldsymbol{X}^{-1}_{odq}$ має такий вигляд:

$$\boldsymbol{X}_{odq}^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{1}{x_0} & & & & & \\ \hline & \frac{x_f \cdot x_{d1} - x_{ad}^2}{s} & & \frac{-x_{ad} \cdot x_{sd1}}{s} & \frac{-x_{ad} \cdot x_{sf}}{s} & \\ \hline & & \frac{x_{d1}}{p} & & & -\frac{x_{aq}}{p} \\ \hline & \frac{-x_{ad} \cdot x_{sd1}}{s} & & \frac{x_d \cdot x_{d1} - x_{ad}^2}{s} & \frac{-x_{ad} \cdot x_{ss}}{s} & \\ \hline & \frac{-x_{ad} \cdot x_{sf}}{s} & & \frac{-x_{ad} \cdot x_{ss}}{s} & \frac{x_d \cdot x_f - x_{ad}^2}{s} & \\ \hline & & -\frac{x_{aq}}{p} & & & \frac{x_q}{p} \\ \hline \end{array},$$

(19)

де

$$s = x_f x_d x_{d1} - x_{ad}^2 (x_d + x_{sf} + x_{sd1}),$$
$$p = x_q x_{q1} - x_{aq}^2.$$

Оскільки в рівнянні (18) вектор перших похідних від струмів синхронної машини у фазних осях обчислюється безпосередньо за параметрами, струмами та напругами, що представлені в осях *odq*, то рівняння зв'язку (9) не використовується, а застосовують лише рівняння зв'язку координат (7), (8).

На компонентному рівні опису електричного підграфа синхронна машина характеризується як традиційними матрицями параметрів $\boldsymbol{R}_{в.о.}$, $\boldsymbol{X}_{odq}$, $\boldsymbol{G}_{odq}$, так і нетрадиційними матрицями параметрів $\boldsymbol{X}^{-1}_{odq}$, $\boldsymbol{XM}_{odq}$. А у якості змінних використовують вектори напруг $\boldsymbol{U}_{odq}$, струмів $\boldsymbol{I}_{odq}$ та перших похідних від струмів або в координатах *odq* – dI_{odq}/d□, або у фазних осях $dI_{в.о.}/d$□. При цьому схема з'єднання статорних обмоток у рівняннях (2), (17) не відображена. Однак важливим завданням є моделювання процесів, що відбуваються у синхронній машині при різних схемах з'єднання їх статорних обмоток. У цьому випадку необхідні уявлення внутрішньої структури багатополюсного компонента та використання вектора потенціалів полюсів $\boldsymbol{V}$ синхронної машини $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}^{t}\cdot\boldsymbol{V}$, де $\mathbf{P}^{t}$ – матриця інциденцій обмоток син-хронної машини у фазних осях, транспонована.

Представлення параметрів синхронної машини в координатах *odq* необхідно виконати і для такого внутрішнього її параметру як структура, тобто для схеми з'єднання обмоток. Так, згідно з рівнянням (7) вектор потенціалів полюсів синхронної машини в координатах *odq* можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{V}_{odq} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{V},$$

або

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \boldsymbol{V}_{odq}.$$

Тоді вектор напруги на обмотках синхронної машини в координатах отримуємо в такому порядку

$$\boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{P}^{t} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{P}^{t} \cdot \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \boldsymbol{V}_{odq}.$$

Позначимо

$$\boldsymbol{P}_{odq}^{t} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{P}^{t} \cdot \boldsymbol{AP}^{t}.$$

З урахуванням (7) знаходимо

$$\boldsymbol{U}_{odq} = \boldsymbol{P}_{odq}^{t} \cdot \boldsymbol{V}_{odq}, \quad (20)$$

де $\boldsymbol{P}^{t}_{odq}=\boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{P}^{t}\cdot\boldsymbol{AP}^{t}$ – матриця інциденцій синхронної машини в осях *odq*, транспонована.

Вираз першого закону Кірхгофа, записаний для внутрішньої схеми з'єднання обмоток синхронної машини, має вигляд $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$.

З урахуванням рівняння (8) здійснимо перехід до координатних осей *odq*

$$\boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{AP}^{t} \cdot \boldsymbol{I}_{odq} = 0,$$

або

$$\boldsymbol{P}_{odq} \cdot \boldsymbol{I}_{odq} = 0,$$

де $\boldsymbol{P}_{odq}=\boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{AP}^{t}$ – матриця інциденцій в осях *odq* [1].

Зазначимо, що при з'єднанні фазних обмоток за схемою "зірка" матриці інциденцій в осях *odq* та фазних осях рівні одиничній матриці: $\boldsymbol{P}_{odq}=\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$.

При з'єднанні фазних обмоток синхронної машини "трикутником" маємо

$$\boldsymbol{P}_{odq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, на компонентному рівні опису електричного підграфа синхронна машина в координатних осях *odq* додатково охарактеризована матрицею інциденцій $\boldsymbol{P_{odq}}$ та описується рівнянням або (2), або (18) разом із рівнянням (20).

Моделювання процесів з багаторазовим відстежуванням характеру їх протікання при різних умовах частіше називають імітаційним моделюванням. При вдалій організації активності дослідника, впровадження діалогового режиму використання ЕОМ, імітаційне моделювання суттєво підвищує ефективність вивчення об’єкта, тобто є науковою основою організації сучасного навчального процесу, новітньою технологією навчання яка орієнтована на сталений розвиток [4]. Роль дослідника в процесі навчання активно відіграє студент, а вивчення об‘єкту відбувається шляхом вивчення поведінки його моделі.

Досліджуючи поведінку цієї моделі та передбачаючи очікуваний результат моделювання, дослідник або студент, поки не доведе свої знання в моделі до рівня адекватності об‘єкта, що вивчається, не в змозі надурити ЕОМ (тобто отримати бажаний результат). Це і є найефективніша технологія розвитку власних знань та вмінь. ***Це імітаційне моделювання і є основою процесу творчості***. Процес творення містить в собі і дослідження, і навчання. Більш того, змістовний характер носить процес творення, який має суб‘єктивний зміст для кожної особи а наведені моделі синхронної машини і є основою, за якою грунтуються власні розробки по вирішенню нових завдань та досягнення пріоритетних цілей у конкретних дослідженнях. ***Отримання, здобуття нового знання є і науковий процес, і навчальний процес водночас***.

Література.

1. Веретенников Л.П. Исследование процессов в судовых энергетических системах: Теория и методы. – Л.: Судостроение, 1975. – 376 с.
2. Кениг В., Блекуэлл В. Теория электромеханических систем: пер. с англ. – М.: Энергия, 1965. – 314 с.
3. Краснов В.В., Мещанинов П.А., Мещанинов А.П. Основы теории и расчёта судовых электроэнергетических систем: Моделирование для исследования специальных режимов: Уч. пособие. – Л.: Судостроение, 1989. – 328 с.: ил.
4. Дрейер О.К., Лось В.А. Экология и устойчивое развитие: Уч. пособие. – М.: Изд-во УРАО, 1997. – 224 с.