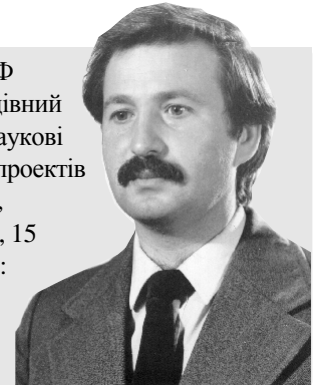


Трунов Олександр Миколайович, декан ф-ту комп'ютерних наук МФ НаУКМА. 1951 року народження. Закінчив Миколаївський кораблебудівний інститут у 1975 році. У 1978 році захистив дисертацію. 1981-1982 вів наукові дослідження в Едінбурзькому університеті. 1983-1993 – очолював ряд проектів за програмами АН СРСР та ГКНТ з надійності та довговічності машин, засвоєння світового океану та робототехніки. Автор 95 наукових праць, 15 винаходів. Кандидат технічних наук, доцент. Сфера наукових інтересів: робототехніка, сенсорна техніка та математичне моделювання нелінійних систем.



УДК 512

Трунов О.М.

Застосування методу рекурентної апроксимації до розв'язку нелінійних задач

В більшості задач математичної фізики, зокрема в гідрогазодинаміці та магнітодинаміці, в задачах адаптивного керування робототехнічними системами, виявляється інтерес до нелінійних математичних моделей. Останні, являючи собою моделі у вигляді нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних та алгебраїчних нелінійних рівнянь, ускладнюють побудову їх аналітичних розв'язків.

Розвиток методів лінійного наближення, а також теорії двоїстості Мінковського, Феншеля, Куна, Таккера та введеної в варіаційному численні Фрідріхсом, в сукупності з теорією позитивних та монотонних операторів, теорією узагальненої опуклості та диференціальних нерівностей, заснованої Чаплигіним, послужило основою формування нових цілей досліджень:

- сформулювати єдиний підхід до аналізу нелінійних моделей;
- представити розв'язки нелінійних рівнянь через розв'язки лінійних.

В існуючих методах Ньютона–Канторовича, квазілінеаризації Р.Беллмана–Р.Калабі ці цілі частково досягаються за рахунок використання по суті кусково-лінійної апроксимації нелінійного оператора. Ефективність такого підходу неодноразово демонструвалась для задач знаходження кореня, крайових задач та варіаційних задач. Але застосовність методу Ньютона–Канторовича, а отже і квазілінеаризації обмежена вимогою монотонності та строгої опуклості. При цьому вимога лінійності апроксимації входить в протиріччя з вимогою точності на кожному кроці рекурентного наближення, а рівність нулю першої похідної оператора робить неможливим, для деяких видів оператора, застосування методу.

В роботі [3] запропонований та досліджений підхід, заснований на кусково-нелінійній апроксимації. Там же показана можливість застосування апарата скінченно-інтегральних перетворень до розв'язку нелінійних крайових задач. Дана оцінка похибки першого наближення, показано вплив на похибку власних чисел задачі. Запропонована рекурентна послідовність для знаходження похибки як розв'язку лінійних крайових задач. Досліджені питання їх збіжності. Така рекурентна апроксимація поєднала дві суперечливі вимоги лінійності та збіжності з нелінійним оператором на всій області визначення, зберігаючи при цьому максимум простоти та загальності алгоритму. Даний підхід застосовний навіть у випадку, якщо область значень першої похідної містить нульові значення, тобто оператор має локальні

екстремуми.

В цій роботі досліджується можливість використання запропонованого в [3] методу рекурентних апроксимацій для розв'язку задач знаходження коренів нелінійних рівнянь, системи нелінійних рівнянь, розв'язку системи диференціальних нелінійних рівнянь, диференціальних нелінійних рівнянь та крайових задач. Особлива увага при цьому приділена дослідженню характеру збіжності рекурентних апроксимацій та зв'язку запропонованого підходу з відомими методами Ньютона-Канторовича, квазілінеаризації Беллмана-Калаби.

1. Застосування до розв'язку нелінійних алгебраїчних рівнянь. Збіжність рекурентних наближень, одновимірний варіант.

Розглянемо задачу знаходження кореня скалярного рівняння $L(x)=0$ методом рекурентної апроксимації.

Покладемо, що $L(x)$ – монотонно спадна строго опукла функція, що має n похідних, до того ж $L'(x)<0$ для всіх x , що належать області визначення, тобто вона має один простий корінь x^* , (мал. 1) $L'(x^*)\neq 0$. Утворимо послідовність $\{x_n\}$ та дослідимо її збіжність.

Нехай x_0 – перше наближення для кореня x^* , причому $x_0 < x^*$, а $L(x_0) > 0$. Тоді, представляючи $L(x)$ в околі точки $x=x_0$ у вигляді рекурентної послідовності $\{x_n\}$ [3], отримаємо (див. мал. 2 – штрихова крива).

$$L(x) = L(x_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta^{k-1} \Delta_n}{k!}. \quad (1)$$

Тоді наступне наближення отримується з розв'язку лінійного рівняння відносно x ,

$$x_1 = x_0 - \frac{L(x_0)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta^{k-1}}{k!}}, \quad (2)$$

потім процес повторюється, для x знаходиться нове значення x_2 і т.д. як показано на мал. 2. Загальне рекурентне співвідношення має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{L(x_n)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta^{k-1}}{k!}}, \quad (3)$$

Якщо на початку $x_0 < x^*$, то з малюнку 2 видно, що $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x^*$. Але більш строго це впливає з нерівності $L(x_n) > 0$, $L'(x_n) < 0$, $L''(x_n) > 0$ для двох членів ряду або, за умови збіжності знаменника, останній виразиться через різні значення оператора в точках x_{n+1} і x_n тобто

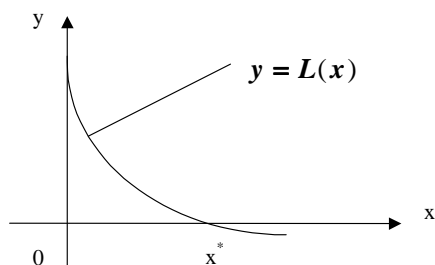
$$x_{n+1} = x_n - \frac{L(x_n) \Delta_n}{L(x_{n+1}) - L(x_n)}.$$

Звідки видно, що для спадного оператора та при умові $x_0 < x^*$, тобто $\Delta_n > 0$ і $L(x_{n+1}) < L(x_n)$ виконується $x_{n+1} > x_n > x_0$, так як другий член за цих умов лише додатний.

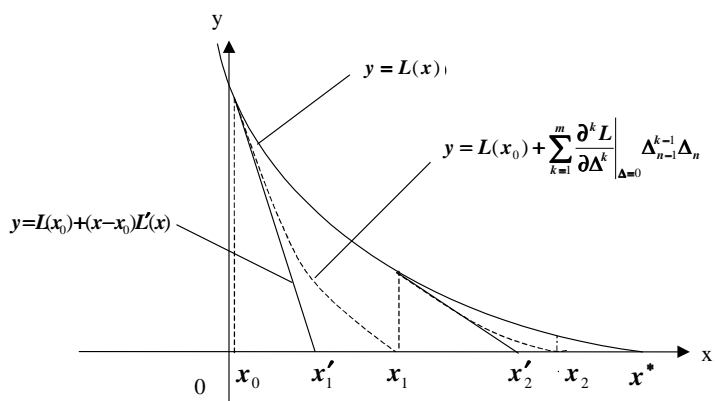
У співвідношеннях (1)-(3) в якості Δ_{n-1} на n -ому кроці може бути використана кусково-лінійна апроксимація. Так, якщо оператор $L(x)$ розкласти в ряд Маклорена по Δ у відповідності з [3] та обмежитися двома членами, то

$$L(x) = L(x_0) + \frac{\partial L(x)}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0} \cdot \Delta, \quad (4)$$

звідки за умови, що x – корінь, тобто $x=x^*$, а



Мал. 1.



Мал. 2.

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0} = \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x=x_n}, \quad (5)$$

в силу лінійності $x=x_n+\Delta$, маємо

$$\Delta_{n-1} = -\frac{L(x_{n-1})}{L'(x_{n-1})}. \quad (6)$$

Аналогічний результат отримаємо, якщо обчислимо безпосередньо Δ_n по визначенню [3], скориставшись для знаходження n -го наближення методом Ньютона-Канторовича

Ця апроксимація ефективна, але більш раціональна з точки зору збіжності на даному кроці заміни нелінійного

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1} &= x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - \frac{L(x_{n-1})}{L'(x_{n-1})} - x_{n-1} = \\ &= -\frac{L(x_{n-1})}{L'(x_{n-1})}. \end{aligned} \quad (7)$$

оператора буде кусково-параболічна апроксимація. Вона впливає з розкладу $L(x)$ в ряд Маклорена [3]. Так, якщо в розкладі обмежитися трьома членами, тобто

$$\begin{aligned} L(x) &= L(x_0) + \frac{\partial L(x)}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0} \cdot \Delta + \\ &+ \frac{\partial^2 L(x)}{\partial \Delta^2} \Big|_{\Delta=0} \cdot \frac{\Delta^2}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

отримаємо

$$\Delta = -\frac{L'(x)}{L''(x)} + \sqrt{\left[\frac{L'(x)}{L''(x)}\right]^2 - \frac{2L(x)}{L''(x)}}. \quad (9)$$

Така апроксимація остання, в якій Δ безпосередньо визначається через властивості оператора. Подальше утримання членів з більш високим степенем Δ у ряді Маклорена при апроксимації-розкладі не дає простих виразів, розв'язаних відносно Δ .

Так, щоб визначити Δ_{n-1} , тобто наближене значення Δ_n для даного x_n , у відповідності з рекурентним співвідношенням [3], завдяки якому і забезпечується збіжність, необхідно знати два попередніх її значення, які позначимо Δ_{n-3} і Δ_{n-2} , якщо вони відомі, наступне значення розраховується

$$\Delta_{n-1} = \frac{\Delta_{n-2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-3}^{k-1}}{k!}}{\sum_{k=1}^{m+1} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-1}}{k!}}.$$

В якості Δ_{n-3} і Δ_{n-2} ,

можна вибирати, наприклад, вирази (6) та (9).

Таким чином при висловлених обмеженнях, накладених на $L(x)$, ми встановимо властивості послідовності $\{x_n\}$:

- по-перше, двосторонню збіжність;
- по-друге, квадратичну збіжність,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M |x_n - x^*|^2, \quad (10)$$

яка не так очевидна, а вимагає доведення.

Для цього обчислимо нев'язки та порівняємо їх, враховуючи, що $L(x^*)=0$.

де

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= x_n - \frac{L(x_n)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} - x^* = \\ &= x_n - \frac{L(x_n)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} - \\ &- \left(x^* - \frac{L(x^*)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{(x-x^*)^{k-1}}{k!}} \right) = \\ &= \Psi(x_n) - \Psi(x^*), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Psi(x) = x - \frac{L(x)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{(x-x^*)^{k-1}}{k!}}. \quad (12)$$

Розкладаючи $\Psi(x)$ в ряд Тейлора в околі x^* , обмежившись трьома членами ряду, отримаємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= (x_n - x^*)\Psi'(x^*) + \\ &+ \frac{(x_n - x^*)^2}{2}\Psi''(x^*). \end{aligned} \quad (13)$$

Після диференціювання Ψ маємо

$$\Psi'(x) = \frac{L(x) \sum_{k=2}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!} \right)^2}, \quad (14)$$

звідки в силу $L(x^*)=0, \square \ddot{y}(x^*) \epsilon 0$.

Отже (15)

$$|x_{n+1} - x^*| \leq k |x_n - x^*|^2,$$

$$k = \max \frac{\Psi''(x)}{2}. \quad (16)$$

Не менш важливо показати також, що різниця між послідовними наближеннями визначається

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \Psi(x_n) - \Psi(x_{n-1}) = \\ &= (x_n - x_{n-1}) \Psi'(x_{n-1}) + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2} \Psi''(x_{n-1}) = \\ &= \frac{(x_n - x_{n-1}) L(x_{n-1}) \sum_{k=2}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-1}}{k!} \right)^2} + \\ &+ \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2} \Psi''(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

$$(x_{n+1} - x_n) = (x_n - x_{n-1})^2 \cdot$$

$$\left[\frac{\Psi''(x_{n-1})}{2} - \frac{\sum_{k=2}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-1}}{k!} \right)^2} \right].$$

співвідношеннями $|x_{n+1} - x_n| \leq k_1 |x_n - x_{n-1}|^2$,

$$k_1 = \max_{x_0 \leq x \leq x^*} \left| \frac{\sum_{k=2}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!} \right)^2} + \left| \frac{\Psi''(x_{n-1})}{2} \right| \right|.$$

похідних $L(x)$.

Обчислимо аналогічну різницю

$$x_n = x_{n-1} + \Delta_n = x_0 + \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad (18)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= x - x_n = x^* - x_n = \\ &= x_n - \frac{L(x_n)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} - x_n = \Psi(x), \end{aligned} \quad (19)$$

Утворена послідовність $\{x_n\}$ може бути представлена через нев'язку \square_n наступним чином

$$\Psi(\Delta_{n-1}) = \frac{-L(x)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}}.$$

показана збіжність для послідовності $\{x_n\}$ справедлива для $\{\square_n\}$. Покажемо, що в околі кореня $x=x^*$ існують двостороння та квадратична збіжності

$$\Delta_n = \Psi(x^*) + \Psi'(x^*) \Delta_{n-1} + \frac{\Psi''(x^*) \Delta_{n-1}^2}{2}.$$

де позначено

$$\Psi' = \frac{L(x^*) \sum_{k=2}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left| \sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!} \right|^2},$$

Тепер розкладемо Δ_n в ряд в околі x^*

Так як

$$|\Delta_n| = \frac{\Psi''}{2} \Delta_{n-1}^2 \leq \left| \frac{\Psi''}{2} \right|_{\max} \Delta_{n-1}^2.$$

то $\square \ddot{y}(x^*) \epsilon 0$, а ухилення (нев'язка) має квадратичну збіжність

$$\Delta = \sum_{n=1}^m \Delta_n,$$

Наведений аналіз не враховує особливостей алгоритму визначення \square_{n-1} . Врахування двох простіших алгоритмів, описаних вище, та алгоритму [3], лише покаже, що збіжність ще більш швидка, а обмеження, властиві методу Ньютона-Канторовича $L'(x) \neq 0$ можуть бути зняті.

Досі ми розглядали монотонно спадний оператор. Покажемо, що, якщо $L(x)$ в інтервалі $[x_0, x^*]$ неперервна,

то послідовність $\{x_n\}$ збігається, тобто має межу навіть, якщо $L(x)=0$.

Перетворимо спочатку x_n , скориставшись попередніми результатами

$$\Delta_n = \frac{-L(x)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} = \frac{L(x)\Delta_{n-1}}{L(x_0) - L(x)}$$

$$= \frac{\Delta_{n-1}}{\frac{L(x_0)}{L(x)} - 1}$$

Збіжність x_n вже обговорювалась, але з останнього рівняння видно, що алгоритм рекурентної апроксимації для наближеного значення нев'язки x_{n-1} лише прискорює процес збіжності, причому для більш широкого класу операторів, ніж для методів Ньютона-Канторовича та квазілінеаризації, оскільки множник при x_{n-1} -ому члені ряду для x_n існує при існуванні $L(x)$ і $L(x) \neq L(x_0)$, при будь-яких значеннях $L(x)$, навіть при $L(x) = 0$, то єдиним обмеженням для методу, що накладається на оператор $L(x)$, є його неперервність разом із вимогою існування та обмеженості для усіх його $n+1$ похідних на відрізку $[x_0, x^*]$, причому

$$\left| \frac{\partial^k L(x)}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} > \left| \frac{\partial^{k+1} L(x)}{\partial \Delta^{k+1}} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta}{k+1} \right|$$

Таким чином, доведено, що запропонована в [3] рекурентна апроксимація має двосторонню квадратичну збіжність для довільного неперервного оператора, що існує на відрізку $[x_0, x^*]$, навіть при наявності локальних екстремумів ($L'(x)=0$) і навіть для не простих коренів $L'(x)=0$.

2. Застосування до розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо задачу знаходження розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} L_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = 0 \\ \dots \\ L_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = 0 \quad i=1,2,\dots,N, \\ \dots \\ L_N(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = 0 \end{cases}$$

або, якщо ввести N -вимірний вектор x , то в векторному позначенні $L(x)=0$.

Припустимо, що при відповідних вимогах розділу 1

до оператора $L(x)$ та його похідних знайдено x_0 – початкове наближення вектора x , тоді, застосовуючи рекурентну апроксимацію (1), запишемо

$$L(x) \cong L(x_0) + J(x_0)(x - x_0), \quad (20)$$

де $J(x_0)$ – матриця, елементами якої є

$$J_{ij}(x_0) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial^l L_i(x)}{\partial \Delta_j^l} \Big|_{\Delta_j=0} \cdot \frac{\Delta_j^{l-1}}{l!}. \quad (21)$$

Нове наближення визначимо за формулою

$$x_1 = x_0 - J(x_0)^{-1} L(x_0), \quad (22)$$

або рекурентна послідовність визначить і наближення вектора

$$x_{n+1} = x_n - J(x_n)^{-1} L(x_n). \quad (23)$$

Властивості квадратичної збіжності цієї послідовності при аналогічних припущеннях для $L(x)$ доводяться аналогічно доведенням розділу 1.

3. Застосування для знаходження додатних коренів n -степеня.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, $a > 0$.

Покладемо $L(x) = x^n - a$,

оскільки $L(x)$ задовільняє вимогам розділу 1, то рекурентне співвідношення набуде вигляду

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^n - a}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \cdot \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}}. \quad (24)$$

Зауважимо, що для $n=2$, якщо обмежитися лише двома членами розкладу, це співвідношення має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n + (x_n - x_{n-1})} =$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}}. \quad (25)$$

Останнє досить близько до добре відомого алгоритму Герона Александрійського, а якщо обмежитися одним членом суми ряду знаменника в (24), то воно повністю співпадає

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}. \quad (26)$$

4. Застосування до розв'язку системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Розглянемо нелінійну систему

Вводячи \mathbf{X} як N -вимірний вектор з компонентами x_1, x_2, \dots, x_N, t , а $L(\mathbf{X})$ з компонентами $L_i(x_1, x_2, \dots, x_N), i=1, 2, 3, \dots, N$, приведемо систему рівнянь до векторного вигляду

$$\frac{dx_i}{dt} = L_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Нехай крайові умови мають вигляд скалярних добутоків

$$(\mathbf{x}(0), \mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i; \quad i=1, 2, \dots, k$$

$$(\mathbf{x}(\mathbf{b}), \mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i; \quad i=k+1, \dots, N$$

де \mathbf{a}_i – вектори, а \mathbf{b}_i – задані скаляри.

$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = L(\mathbf{X})$. Як ми це вже робили раніше при розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, застосуємо рекурентну

апроксимацію до рівняння

$$\frac{d\mathbf{X}^{n+1}}{dt} = L(\mathbf{X}^n) + J(\mathbf{X}^n)(\Delta_n),$$

та граничних умов

$$(\mathbf{x}^{n+1}(0), \mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i; \quad i=1, 2, \dots, k,$$

$$(\mathbf{x}^{n+1}(\mathbf{b}), \mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i; \quad i=k+1, \dots, N.$$

Тоді отримаємо послідовність векторів $\{\mathbf{x}^n\}$. Розв'язок цієї системи отримано відомими методами із врахуванням матриці (21).

5. Застосування до розв'язку нелінійних крайових задач.

Розглянемо три приклади нелінійних крайових задач, для яких розв'язок відомий в квадратурах, та проведемо порівняння їх з наближеним розв'язком за методом рекурентної апроксимації [3], тобто $L_1(\Phi) = L_2(\Phi)$, де $\Phi(x, y, z)$ шукана функція координат.

Враховуючи наближеність запропонованого методу, зупинимось на прикладах, що ілюструють його збіжність. Спочатку розглянемо випадок, в якому лінійний оператор є оператор Лапласа у двовимірному просторі, а в якості нелінійного оператора виберемо $L_2(\Phi) = \Phi^k$ – цілостепеневу нелінійність, або $\square \Phi = \Phi^k$. Результати збіжності в середньому представлені в таблиці 1. Як правило, в розглянутих випадках збіжність в середньому практично забезпечується починаючи з четвертого або третього наближення. Тут Φ_1 – перше наближення задовольняє д. р. $L_1(\Phi_1) = L_3(\Phi_1)$,

де $L_3(\Phi)$ – лінійна апроксимація $L_2(\Phi)$.

Покажемо на прикладах рівнянь, що мають точні розв'язки та нелінійність, швидкість збіжності рекурентної послідовності та ефективність запропонованого методу.

Розглянемо приклад, у якому L_1 – оператор Лапласа у одновимірному просторі, а L_2 експоненціальна нелінійність. Точний розв'язок такої крайової задачі

Таблиця 1. Аналіз збіжності в середньому розв'язків

Нелінійність,	Відносна похибка			
	Номер наближення, n			
	1	2	3	4
2	1,25	0,11	0,012	0,001
3	2,375	0,259	0,037	0,006

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = e^\Phi; \quad \Phi(0) = \Phi(1) = 0, \quad (27)$$

дано у роботах по магнітній гідродинаміці, Р.Беллмана та Р.Калаби і Камке

$$\Phi(x) = -\ln 2 + 2 \ln \{c \cdot \text{Sec}[c(x-0,5)/2]\}, \quad (28)$$

де c – корінь рівняння

$$c \cdot \text{Sec}\left(\frac{c}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad c = 1,3360557.$$

Результати чисельного порівняння представлені в таблиці 2. Як свідчить порівняння розв'язків, отриманих за методом автора для Φ_1 і $\Phi_1 + \square_1$ і точного, збіжність достатньо висока.

$$\Phi_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1; \quad C_1 = (e+1)^{-1};$$

$$C_2 = e(e+1)^{-1}.$$

Ми розглянули приклад, коли $L_2(\Phi)$ є функцією Φ , тобто образом від одного прообразу. Покажемо, що застосування вказаного підходу можливе, якщо $L_2(\Phi)$ – образ від багатьох прообразів. В цьому випадку розклад його в ряди Маклорена по нев'язках усіх прообразів дозволяє побудувати рекурентну послідовність, аналогічну (1). Так, наприклад, розглянемо оператор від шуканої функції та її похідної, тоді розклад

Таблиця 2. Аналіз збіжності розв'язків нелінійних рівнянь

x	$\Phi_I(x)$	$\Phi_{I+\square_I}$	$\Phi(x)$	$(\Phi_{I+\square_I}-\Phi)/\Phi, \%$
0	0	0	0	0
0,1	-0.041285	-0.041363	-0.041436	0.176
0.2	-0.072974	-0.073216	-0.073268	0.071
0.3	-0.095386	-0.095796	-0.095800	0.004
0.4	-0.108743	-0.109275	-0.109238	-0.034
0.5	-0.113181	-0.113756	-0.113704	-0.046
0.6	-0.108743	-0.109275	-0.109238	-0.034
0.7	-0.095386	-0.095796	-0.095800	0.004
0.8	-0.072974	-0.073216	-0.073268	0.071
0.9	-0.041285	-0.041363	-0.041436	0.176
1	0	0	0	0

$$L_2(\Phi) = L_2(\Phi_1) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^k L_2(\Phi)}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_n^k}{k!} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^k L_2(\Phi)}{\partial \delta^k} \Big|_{\delta=0} \frac{\delta_n^k}{k!}, \quad (29)$$

$$\Phi_1 = \alpha^{-2} \left\{ (1 - e^{-\alpha^2 x}) / (1 - e^{-\alpha^2}) - x \right\} \quad (33)$$

приводить до рекурентної послідовності для нев'язки

$$L_1(\Delta_n) = L_2(\Phi_1) - L_3(\Phi_1) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^k L_2(\Phi)}{\partial \Delta^k} \Big|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^k \Delta_n}{k!} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^k L_2(\Phi)}{\partial \delta^k} \Big|_{\delta=0} \frac{\delta_{n-1}^k \delta_n}{k!}, \quad (30)$$

$\delta = \Phi' - \Phi'_1 = \Delta'$ де

Слід відзначити, що якщо виконуються умови неперервності та існування для $L_2(\Phi)$ разом з її n похідними [3], то ряди збігаються, а \square прямує до розв'язку відповідного для нев'язки д. р. при n , що прямує до нескінченності.

Як другий чисельний приклад розглянемо рівняння

$$-\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = 1 + \alpha^2 \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2; \Phi(0) = \Phi(1) = 0, \quad (31)$$

що виникають при вивченні скінчених деформацій пружної струни під дією поперечного навантаження. Точний аналітичний розв'язок цієї двоточкової крайової задачі при $\square=0.7$ має вигляд

$$\Phi(x) = \alpha^{-2} \ln \left[\frac{\cos \alpha(x - 0.5)}{\cos \alpha / 2} \right]. \quad (32)$$

Результати чисельного порівняння представлені в таблиці 3. Як показує порівняння розв'язків, отриманих за методом автора для Φ_1 та $\Phi_{I+\square_I}$ та точного, збіжність дуже висока

Таблиця 3. Аналіз збіжності розв'язків нелінійних

X	$\Phi_I(x)$	$\Phi_{I+\square_I}$	$\Phi(x)$	$(\Phi_{I+\square_I}-\Phi)/\Phi, \%$
0	0	0	0	0
0.1	0.047844	0.046562	0.046571	0.019
0.2	0.083642	0.082287	0.082304	0.020
0.3	0.107969	0.107551	0.107573	0.020
0.4	0.121374	0.122613	0.122635	0.018
0.5	0.124378	0.127624	0.127639	0.011
0.6	0.117481	0.122677	0.122635	-0.035
0.7	0.101154	0.107617	0.107573	-0.041
0.8	0.075848	0.082341	0.082304	-0.045
0.9	0.041994	0.046592	0.046571	-0.046
1	0	0	0	0

Як третій чисельний приклад розглянемо рівняння

$$-m_x \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \bar{\Psi}_{yz} + \alpha_x \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2; \quad (34)$$

$t = 0; \Phi = 0; \frac{d\Phi}{dt} = 0.$

Розв'язок цього рівняння отримано в роботі [4]. Співставлення точного розв'язку та наближеного представлені в таблиці 4. Як показує порівняння розв'язків, отриманих за методом автора для Φ_1 і $\Phi_{I+\square_I}$ і точного, збіжність дуже висока. Розрахунки наведені для $m_x=100; \square_x=1; \square_I=1$. Така похибка зберігається до значень аргументу 10.

$$\Phi_1 = \frac{\bar{\Psi}_{yz}}{\alpha_x} \left\{ \frac{m_x}{\alpha_x} (1 - e^{-\alpha_x t / m_x}) - t \right\}. \quad (35)$$

Таким чином, запропоновано наближений метод розв'язання нелінійних крайових задач математичної фізики. За своїм призначенням він ближче за все стоїть до методів Ньютона-Канторовича та квазілінеаризації Р.Беллмана і

Таблиця 4. Аналіз збіжності розв'язків нелінійних рівнянь.

x	$-\Phi_I(x)$	$-\square_I$	$-\Phi(x)$	$(\Phi_I + \square_I - \Phi) / \Phi, \%$
0	0	0	0	0
0.1	0.000050	0.000000	0.000050	0.001
0.2	0.000200	0.000000	0.000200	0.001
0.3	0.000450	0.000000	0.000450	0.001
0.4	0.000799	0.000001	0.000800	0.001
0.5	0.001249	0.000002	0.001250	0.001
0.6	0.001796	0.000004	0.001800	-0.001
0.7	0.002444	0.000006	0.002450	-0.001
0.8	0.003191	0.000009	0.003200	-0.001
0.9	0.004039	0.000012	0.004050	-0.001
1	0.004983	0.000017	0.005000	-0.001

Р.Калаби, але обидва ці методи припускають наявність досить доброго першого наближення. Крім того, обидва ці методи мають обмеження: додатність нелінійного оператора; відсутність локальних екстремумів, а для методу Ньютона-Канторовича ще й відсутність нульових значень похідної від нелінійного оператора.

Запропонований метод дозволяє визначити перше наближення з допомогою ефективного апарату скінченно-інтегральних перетворень. Як ілюструють співставлення цих розв'язків, вони з високим ступенем точності узгоджуються з точними розв'язками для окремих випадків. Далі, цей метод пропонує аналітичний спосіб знаходження нев'язки, запропонована для її знаходження рекурентна послідовність, яка дуже швидко збігається. Практично можна обмежитися першим наближенням для нев'язки. Все це разом узяте відкриває нові можливості для аналітичних досліджень нелінійних алгебраїчних моделей, систем нелінійних диференціальних рівнянь, крайових задач і задач Коші, що описують більшість процесів у глибоководній техніці.

Література.

1. Kalaba R., On nonlinear differential equation, the maximum operation, and monotone convergence, J. Math. Mech. 1959. – № 8. – P. 519-574.
2. Bellman R., Quasilinearization and upper and lower bounds for variational problems, Quart. Appl. Math. – 1962. – № 19. – P. 349-350.
3. Трунов А.Н. Моделирование глубоководных технических средств и систем с распределенными параметрами. Проектирование судов и судовых устройств: Сб. науч. тр. – Николаев: НКИ. – 1989. – С. 127-136.
4. Trounov A.N. Submersible mathematical model. Allowing for dynamic properties of controlling systems. Proc. International Conference, Inter Ocentchnology-90. – 10 с.