УДК 514.12

Кутковецький В. Я.,
д-р техн. наук, професор кафедри комп’ютерної інженерії,
e-mail: kb@chnu.edu.ua,
ЧНУ ім. Петра Могили, м. Миколаїв, Україна
Турти М. В.,
канд. техн. наук, доцент кафедри електрообладнання суден,
e-mail: turtym@meta.ua,
НУК ім. Макарова, м. Миколаїв, Україна

УТОЧНЕННЯ АКСІОМАТИКИ ТА АРИФМЕТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ В ЕВКЛІДОВІЙ ТА НЕЕВКЛІДОВИХ ГЕОМЕТРІЯХ

*Аксіоматика евклідової та неевклідових геометрій мала великий і корисний вплив на математику. Але ніхто не помітив, що в геометрії **практично введені** невизначені символи нескінченно малих m=1/±∞ та нескінченно великих M=±∞ чисел (**ці символи (m,M) авторами штучно введені в аксіоматики для зручності аналізу**). Заміна чисел символами привела до **нечуваних у математиці наслідків**: практичної заборони арифметичних операцій та до їх неповторЮваності при визначенні їх впливу на цифровий аналіз; – можливості нехтування методом цифрового аналізу, за яким не можна у розрахунки вводити замість цифр нечіткі та невизначені символи (m,M); надання у цифровому аналізі переваг лінгвістиці (аксіомам) замість арифметики. **Приклад** (складання двох відрізків): s=a+b=a=∞=const при a=∞; s=a+b=b=const при a=1/∞. Якщо, замість заборони розрахунків, вважати ∞ та 1/∞ конкретними числами (навіть символьними), то заборони не виникає: s=∞+b та s=1/∞+b. У статті уточнено аксіоматику геометрій; показано суперечливість аналізу для трьох часток лінії; запропоновано стосовно паралельних прямих уточнений 4-варіантний постулат Лобачевського та постулат з цифровими ознаками паралельності; розглянуто паралельні лінії в геометрії Рімана.*

***Ключові слова:** геометрія; аксіоматика; Евклід; Лобачевський; Ріман; Гільберт.*

1. Постановка проблеми.

У статті аналізуються перелічені нижче проблеми.

1. З аксіоматики Евкліда випливають ***практично ним використані*** невизначені за числовим значенням «нескінченно малі m=1/±∞» та «нескінченно великі M=±∞» числа – символи, які ***автори штучно «вводять» в аксіоматику Евкліда*** з метою скорочення аналізу. «Застосовані авторами» нечіткі та невизначені символи (m,M) в аксіоматиці Евкліда практично привели до заборони виконання арифметичних операцій та надання переваг лінгвістичним оцінкам результатів цифрового аналізу. У Гільберта нечітке M «заховане» під «конгруентність» і тому його аксіоматика є еквівалентною з Евклідовою. Треба нагадати, що повторюваності розрахунку за наявності (m,M) теоретично не існує.

2. Важливе значення в аксіоматиці мають визначення елементів геометричних фігур. У геометрії точка описується як місце (координати) без розмірів в арифметичному просторі $X=(x_1,x_2,\ldots x_j,\ldots,x_n)$. На практиці точка (лінії та ін.) може охопити лише частку цифрової інформації вектора X, а додатково може мати інформацію зв’язків, призначень, логічних та лінгвістичних змінних. Тому визначення геометричних елементів та фігур ***можуть мати*** додаткову інформацію з боку експерта.

3. Зменшує інформативність аксіоматик те, що в них (навіть у довідниках) не згадується власна Система Координат та метрики (у тому числі й n-вимірний простір та його зв’язок з 1-, 2-, 3-вимірними просторами). Начебто геометрія не охоплює реальне середовище, не має метрик, вимірювань, розрахунків та похибок.

4. Немає опису ділянок застосування та причин відмінностей геометрій Евкліда, Лобачевського, Рімана, Гільберта. Усі вони підтверджені практикою правильно моделюють реальне та абстрактне Оточення. Але водночас вони є «взаємно несумісними» через 5-й постулат Евкліда: у Евкліда та Гільберта паралельні лінії не перетинаються, у Лобачевського через одну точку можна провести безліч паралельних ліній (вони перетинаються), а у Рімана паралельних ліній не існує, оскільки перетинаються будь-які дві лінії.

5. Згідно з постулатом Лобачевського щодо паралельних ліній із зовнішньої точки проводяться паралельні прямі – «промені», які нахилені *до прямої лінії*, але при цьому не розглянуті прямі – «промені», які відхиляються *від прямої лінії*.

6. Можна помітити, що геометрія та усі теореми Лобачевського не змінюються, якщо із зовнішньої точки у відношенні до прямої виходять дві «паралельні» прямі – «промені»з нахилом або *до* або *від* прямої; вони її не перетинають, але *«майже» стають перпендикулярами до неї*.

2. Метою статті є проведення досліджень щодо визначення впливу на результати числового аналізу вказаних проблем. Лінгвістична аксіоматика повинна підтверджуватися «точними» числовими даними та «точними» арифметичними операціями. Лінгвістичні твердження (аксіоми) є правильними, якщо вони підтверджуються числовими вимірюваннями, арифметичними операціями, повторенням результатів розрахунків.

3. Аналіз досліджень та публікацій. Вважаємо, що наведений нижче аналіз (якщо не вказане інше) використовує Прямокутні Координати та арифметичні метрики осей координат у n-вимірному просторі [1, с. 281–308].

3.1. ГЕОМЕТРІЯ ЕВКЛІДА. Геометрія Евкліда вивчається в навчальних закладах, більше за 2000 років та й дотепер є актуальною. Мудрість давньогрецьких математиків підкреслює стислість, повнота та точність аксіоматики Евкліда:

Визначення: 1. Точка є те, що не має частин. 2. Лінія – довжина без ширини. 3. Кінцями ліній є точки. 4. Пряма лінія однаково лежить відносно всіх своїх точок.5. Поверхня є те, що має довжину та ширину і т. д.

Постулати: 1. Від кожної точки до іншої точки можна провести пряму. 2. Обмежену пряму можна продовжувати невизначено довго. 3. З будь-якого центру можна описати коло будь-якого радіусу. 4. Усі прямі кути є рівними. 5. Якщо дві прямі (L_1таL_2, рис. 3.1.1) під час перетинану з третьою прямою L_3 створюють внутрішні односторонні кути, підсумок яких менше двох прямих ($\alpha+\ \beta<2d$), то вони, продовжені нескінченно, перетинаються з тієї сторони, з якої цей підсумок є меншим за дві прямі (2d).

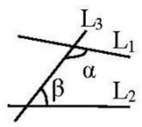

Рис. 3.1.1. 5-й постулат Евкліда

Відносно нескінченно малих (m) та великих (M) величин, які практично застосовуються в аксіоматиці Евкліда, можна нагадати відомі дані:

– «нескінченно велика величина M» *не має чітко визначеного числового значення*, її завжди можна довільно збільшити або зменшити без зміни її визначення;

– «нескінченно малу величину m» завжди можна *довільно розділити на частки* або збільшити у довільну кінцеву кількість разів без зміни її визначення;

– величини (m, M) *є невизначеними*, а одна «нескінченна велика/мала величина» не дорівнює іншій аналогічній величині навіть в одному й тому ж дослідженні; тому «повторення розрахунків» з ними теоретично бути не може.

Але саме ці невизначені «числові величини» ***практично*** використовуються (без їх обговорення) в якості даних геометричних елементів у постулатах Евкліда та Лобачевського, і проблема полягає у визначенні їх впливу на геометричні об’єкти та результати арифметичних розрахунків.

3.2. АБСОЛЮТНА ГЕОМЕТРІЯ. Угорський математик І. Больян виділив 26 речень з геометрії Евкліда, які не залежать від 5-го постулату. Усі ці речення увійшли у склад «абсолютної геометрії». Таким чином, аксіоматика «абсолютної геометрії» плюс постулати Евкліда та Лобачевського щодо паралельних прямих складають аксіоматику геометрій Евкліда та Лобачевського. До цього списку можна також додати й геометрії Рімана та Гільберта, у яких аксіоматики начебто суттєво відрізняються, але їх усіх об’єднує описуване ними Оточення та тотожність усіх існуючих Систем Координат [2].

3.3. ГЕОМЕТРІЯ ЛОБАЧЕВСЬКОГО. Геометрія Лобачевського заснована на даних «абсолютної геометрії» та на постулаті Лобачевського стосовно паралельних ліній [3].

Постулат Лобачевського щодо паралельних ліній має наступний опис (рис. 3.3.1) [3].

Через точку C, яка лежить зовні прямої AB у площині ABC завжди проходять такі дві прямі CEта CF, які мають наступні властивості:

1) прямі CE та CF не перетинаються з прямою AB;

2) усяка пряма CM, що проходить усередині кута FCE перетинається з прямою AB у деякій точці M.

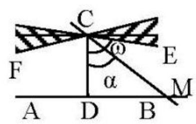

Рис. 3.3.1. Постулат Лобачевського щодо паралельних ліній

3.3.1. Із зовнішньої точки C (витоку двох прямих ліній – «променів» CEта CF) на пряму AB опущений перпендикуляр CD [3] (рис. 3.3.1). Дві прямі CE та CF є паралельними з прямою AB: пряма *CE є правою паралельною з прямою AB* (у напрямі праворуч, від точки A до точки B; зазначають як CE||AB), а *пряма CF є лівою паралельною з прямою AB* (у напрямі ліворуч, від точки B до точки A; записують CF||BA). Усі інші прямі, що проходять заштрихованими ділянками рис. 3.3.1, не перетинаються з прямою AB. *Прямі CE та CF є граничними*: вони розділяють прямі CM, що перетинаються з AB від інших прямих, які з AB не перетинаються і розміщені у заштрихованих ділянках простору рис. 3.3.1.

3.3.2. ***Кут ω = <DCE називають кутом паралельності***, який відповідає відрізку CD, що називають ***стрілкою***. ***Зрозуміло, що кут ω<90°, завжди гострий***. Якщо точка M віддаляється праворуч ***необмежено далеко***, то промінь CM не може перейти через CE, тобто кут α <ω (зазначають, що кут ω< 90° є границею кута α, а пряма CE – є границею прямої CM).

3.3.3. Пряма CE є паралельною прямій AB і є граничним положенням CM, коли точка M ***необмежено віддаляється праворуч*** прямою AB із зростанням кута α, який може на ***скільки завгодно мало відрізнятись*** від кута паралельності ω = <DCE. Кут паралельності залежить від стрілки CD: якщо CD→ 0, то ω→90° ; якщо CD→∞, то ω→0°

3.3.4. Коли ω=90° геометрія Евкліда стає граничним випадком геометрії Лобачевського. Тому Лобачевський назвав свою геометрію «Пангеометрією», тобто загальною геометрією.

3.3.5. У геометрії Лобачевського доведені наступні шість найважливіших теорем [4, с. 42]: 1) похила та перпендикуляр не завжди перетинаються; 2) еквідістанта (точки з рівною відстанню від даної прямої з однієї її сторони) є кривою; 3) підсумок кутів будь-якого трикутника менший двох прямих кутів; 4) подібні фігури (трикутники) відсутні; 5) через точку всередині кута не завжди можна провести пряму, що перетинає обидві сторони кута; 6) не через всякі три точки, які не лежать на одній прямій, проходить коло.

Усі вони доведені методом «від протилежного» на основі твердження, що якщо теореми неправельні, то тоді є правильними 5-й постулат Евкліда, який спростований постулатом Лобачевського.

3.3.6. Важливими фігурами геометрії Лобачевського є ***конус паралельності***, який утворюється під час обертання креслення рис. 3.3.1 навколо перпендикуляра CD. Це дало можливість: розбити простір на внутрішню та зовнішню частки; розбити площини, які проходять через точку C, на три частки (ті, що перетинають конус паралельності двома твірними; ті, що мають з конусом паралельності одну твірну; ті, що не мають твірної з конусом паралельності); вивести дуже важливу ***в просторі Лобачевського*** поверхню, яка називається граничною або ***орісферою***, за допомогою якої доведено, що лише на орісфері нескінченно великого радіусу проходить ***одна пряма, що не перетинається з AB***.

3.3.7. Тому що простір Лобачевського є істинним, класична механіка, фізика та астрономія повинні змінитись під час переходу на неевклідові властивості простору [4, С. 63]. Наприклад, у просторі Лобачевського не діє відомий закон складання швидкостей за формулою $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}$ (бо не існує паралелограма сил), не діє закон важелю Архімеда.

3.3.8. Геометрія Лобачевського ***не має безпосередньої практичної цінності***. Але вона внесла в науку нові принципи у створенні сучасного аксіоматичного метода аналізу [4, с. 65, 71].

3.4. АКСІОМАТИКА ГЕОМЕТРІЇ РІМАНА. У геометрії Рімана сфера розглядається «зовні» і має вигляд площини, яка з протилежного боку «непомітна». Пряма визначається двома точками, площина – трьома, дві площини перетинаються по прямій тощо. Двовимірна геометрія Рімана схожа на сферичну геометрію, але дві «прямі» мають не дві, як у сферичній, а лише одну ***точку перетину***, оскільки лінії (промені) в геометрії Рімана ***є великими колами сфери*** [5, с. 987].

Під час урахуванні протилежної «захованої» частки сфери з відповідними точками, отримується ***проєктивна площина***, яка задовольняє аксіомам геометрії Рімана. Відмінність від евклідової геометрії полягає у відсутності паралельних прямих, бо через точку, не інцидентну цій прямій, не проходить жодна пряма, що не перетинає дану.

n-вимірна геометрія Рімана моделюється на сфері в (n+1) – вимірному евклідовому просторі при ототожненні діаметрально протилежних точок. У геометрії Рімана застосовується у (n+1) – вимірному просторі диференційний аналіз, який має зв'язок «у малому» з n-вимірним простором у взаємно пов'язаних Прямокутних та Сферичних Координатах. Розглядаються аналітичні геометричні образи (n+1) – вимірного порядку та їх зв'язки «у малому» з n-вимірними даними, які описуються у Сферичних Координатах.

3.4. АКСІОМАТИКА ГЕОМЕТРІЇ ГІЛЬБЕРТА. Аксіоматика Гільберта відноситься до евклідової геометрії, але має ***невизначені об'єкти*** (*точки*; *прямі*; *відношення* між ними, які вміщують слова «належить», «між», «конгруентний» – слово, яке приблизно можна вважати словами «подібний, пропорційний») та ***20 аксіом*** (об'єднані у ***5 груп***) [6, с. 970].

У аксіоматиці Гільберта не застосовуються слова «нескінченно малі або великі» величини, але значна увага приділяється питанням ***конгруентності*** (3-тя група з 5-ти аксіом цілком присвячена конгруентності). Наприклад, аксіома 3_1 має вигляд: «Якщо задані відрізок AB і промінь OX, то на промені OX існує точка B* така, що відрізок AB є конгруентним відрізку OB*, тобто AB≡OB*» [4, с. 970].

4.Виклад основного матеріалу.

4.1. ДЕЯКІ ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ.

4.1.1. Визначення точки, лінії, поверхні, площини, тіла. Вектор $X=(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$ у n-вимірному арифметичному просторі є тотожним відповідним векторам 1-, 2-, 3-вимірного простору ($X=Z_1=Z_2=Z_3$), де, наприклад, $Z_1=(z_1)$ при $z_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$ для прямої лінії; $Z_2=(z_1,z_2)$ при $z_1= x_1$, $z_2 = \sqrt{\sum_{j=2}^{n} x_j^2}$ для площі; $Z_3=(z_1,z_2,z_3)$ при $z_1= x_1$, $z_2= x_2$, $z_3 = \sqrt{\sum_{j=3}^{n} x_j^2}$ для об'єму. При цьому відповідним функціям мети $F_1(Z_1)$, $F_2(Z_2)$, $F_3(Z_3)$ можна надати відоме значення F(X), або їх можна розраховувати, але лише у випадку, якщо відомий однозначний перехід від змінних векторів $Z_1=Z_2=Z_3$ до змінних x_j, j=1,2,…,n вектора X, оскільки подібний перехід є багатоваріантним, і тому змінні векторів (Z_2,Z_3) можуть мати різні значення.

Точка – це геометричний об'єкт, який не має розмірів (ширини, довжини, висоти), помічається на кресленні або у вигляді безрозмірного центру поставленої точки, або центру перетинання ліній, або вказаного місця на геометричних фігурах. За рішенням експерта точка ***може*** розглядатися як кінчик відповідних тотожних векторів ($Z_1=Z_2=Z_3=X$), в 1-, 2-, 3-, …,n-вимірному арифметичному просторі $X=(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$. На практиці точка ***може*** характеризувати складний реальний об'єкт з багатьма іншими змінними, і тому ***може*** мати надану експертом додаткову інформацію (цифрову, логічну, лінгвістичну, текстову, звукову чи візуальну), включаючи функцію мети F(X).

Лінія– це складений з точок геометричний об’єкт у вигляді шляху, який з’єднує дві окремі точки простору змінних таким чином, щоб кожна точка всередині мала лише дві сусідні точки. У перетині лінія має вигляд точки. За рішенням експерта лінія ***може*** розглядатися як годограф векторів ($Z_1=Z_2=Z_3=X$), у 1-, 2-, 3-, …, n-вимірному арифметичному просторі змінних $X=(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$ та ***мати***:формулу для її визначення, лінгвістичний опис, функцію мети, ряд характерних точок (наприклад: початок, кінець, точки розділу лінії на частки); метрику; розмір, який вимірюється за метрикою у вигляді підсумку довжин ряду відрізків ліній; поділ на окремі частки лінії; надану експертом додаткову інформацію. Лінія ***може*** продовжуватись «у нескінченність» з кожного боку окремо, або з обох боків, або мати вигляд ***відрізка*** – лінії, обмеженої початковою та кінцевою точками.

Пряма лінія з’єднує найкоротшим шляхом дві точки простору змінних і може мати продовження за їх межами.

Поверхня – це геометричний об’єкт, складений з упорядковано розміщеної множини точок, яка розділяє простір змінних на дві частки, має для кожної своєї внутрішньої точки чотири сусідні точки. Поверхня ***може мати*** визначені експертом формулу для її визначення, лінгвістичний опис, функцію мети, площу, форму, ширину, висоту, обмежені або необмежені розміри тощо.

Площина – це поверхня, дві будь-які точки якої можуть бути з’єднані прямою лінією, що належить цій площині.

Тіло складається з множини точок простору змінних векторів ($Z_1=Z_2=Z_3=X$), обмежених поверхнею/поверхнями від іншого простору. Тіло ***може мати*** задану експертом формулу для його визначення, лінгвістичний опис, функцію мети, об’єм, форму, ширину, висоту, обмежені або необмежені розміри тощо.

Стосовно Системи Координат та кількості змінних: автори виходять із положення, що аналіз у будь-якій Системі Координат може бути проведеним у відповідності з їх особливостями. Але стверджувати, що постулат Рімана є несумісним (і навіть суперечливим) з постулатом Евкліда не можна. Справа у тому, що у них застосовуються різні Системи Координат. У Сферичних Координатах Рімана «прямі» лінії проводяться через «полюс» сферою, їх довжина вимірюється також сферою, у них існують нелінійні зв’язки з даними Прямокутних Координат Евкліда. Не можна вимагати для різних математичних моделей, щоб за допомогою ***лінгвістичних аксіом описувалися і порівнювалися дві різні Системи Координат з складними нелінійними залежностями між ними*** лише для отримання взаємної узгодженості постулатів паралельності прямих. І не можна їх протиставляти, оскільки різні математичні моделі мають різні ознаки.

Крім того, доведено, що всі існуючі Системи Координат (Прямокутні, Полярні, Сферичні, Циліндричні, Кутові, Паралельні, Радіальні, Багатовидів, Тілесних Кутів, Нечіткі Однозначні, Одновимірні багатовимірного простору тощо) мають єдину основу у вигляді ***Системи Півосьових Координат***, з яких отримується всі перелічені вище Системи Координат, а для аналізу і геометричної візуалізації багатовимірних складних інтелектуальних систем потрібно розглядати їх сукупність [2; 7; 8; 9].

4.1.2. Вплив символів на цифрові розрахунки. Для зручності аналізу ***авторами штучно введені*** в аксіоматику геометрій (Евкліда, абсолютну, Лобачевського та Рімана) прямо не вказані і не описані в них, але практично застосовані невизначені символи нескінченно малого $m=1/\pm\infty$ та нескінченно великого $M=\pm\infty$. Виявляється, що при застосуванні у розрахунках цих невизначених і невідомих у цифровому значенні символів (m,M) практично *забороняється виконання арифметичних операцій* і перевага у оцінці отриманого неправильного цифрового результату аналізу надається не арифметичним методам, а лінгвістичним твердженням – аксіомам.

Приклад на складання двох відрізків:

$s=a+b=a=\infty=const$ при $a=\infty$;$s=a+b=b=const$ при $a=1/\infty$.

Якщо, замість заборони розрахунків, вважати ∞ та $1/\infty$ конкретними числами (навіть символьними), то заборони не виникає: $s=\infty+b$ та$s=1/\infty+b$.

4.2. АНАЛІЗ ГЕОМЕТРІЇ ЕВКЛІДА. Аксіоматика геометрії Евкліда вміщує в неявній формі величини нескінченно малого $m=1/\pm\infty$ та нескінченно великого $M=\pm\infty$, які у межах практичної діяльності людини можуть давати ***взаємно суперечливі результати розрахунків***. Але в часи Евкліда суперечливих властивостей символів (m,M) не існувало, вони сприймалися на рівні інтуїції як конкретні числа.

За аксіоматикою Евкліда геометричні елементи із застосуванням «нескінченно малого» (пряма, що з’єднує дві сусідні точки; площа, що вимагає для визначення три сусідні точки; об’єм, що утворюється чотирма сусідніми точками) на практиці можуть *перетворитися на точку*. Стосовно точки, лінії та інших геометричних фігур в аксіоматиці ненаголошують, що вони можуть мати додаткову інформацію з боку експерта.

Якщо в геометрії Евкліда мати дві паралельні лінії з незмінною відстанню між ними, то продовжені нескінченно паралельні лінії перетворюють у розрахунках відстань між ними на практичний нуль (на точку).

4.3. АНАЛІЗ ГЕОМЕТРІЇ ЛОБАЧЕВСЬКОГО. У Прямокутних Координатах у постулаті Лобачевського про паралельні лінії не ураховується, що:

– із точки, яка є зовнішньою у відношенні до прямої лінії, можна провести дві паралельні лінії під різними кутами паралельності – $\omega_1<90°$, $\omega_2<90°$, $\omega_1 \neq\omega_2$;

– усі кути паралельності потрібно аналізувати;

– виникають протиріччя, якщо прийняти ряд різних кутів паралельності ($\omega1<20°$, $\omega2<90°$,$\omega3=90°$, $\omega4>90°$), тому що для кожного кута ($\omega1,\ldots,\omega4$)

формулювання усіх основних теорем Лобачевського не змінюються;

– для двох паралельних ліній із зовнішньої точки немає числової оцінки «нахилу до/від прямої лінії»;

– за рахунок аксіоми паралельності прямих введена можливість проведення нескінченної кількості паралельних ліній у проміжку кутів (ω2<90°)…(ω3=90°);

– застосування нечітких «невизначено малих m / невизначено великих M» вводить у розрахунки неточні та невизначені числові значення m/M.

У геометрії Лобачевського пряма «*a*», що виходить із зовнішньої точки у відношенні до прямої «b», унаслідок нескінченно малої товщини та похибок засобів реалізаціїі вимірювання теоретично відхиляється від паралельності «у нескінченності» та перетинається з прямою «b» з одного боку (з ймовірністю 50 %), або з іншого боку (з ймовірністю 50 %). Тобто будь-які твердження в геометрії Лобачевського правильні на 50 %.

4.3.1. Уточнення постулата паралельних прямих Лобачевського. Нижче наведений уточнений постулат паралельних прямих, який має 4 варіанти рішення і охоплює відомі постулати Лобачевського та Евкліда (рис. 4.3.1).

«Через точку C, яка лежить зовні прямої AB у площині ABC та має: перпендикуляр CDдо прямої AB; пряму A_1B_1 паралельну AB; граничнупряму CF ліворуч від CD, граничнупрямуCEправоруч від CD, нескінченну множину прямих, кожна з яких має вигляд, наприклад, прямої лінії CM, яка перетинає пряму AB у точці M, при наступних властивостях граничних прямих CF та CE:

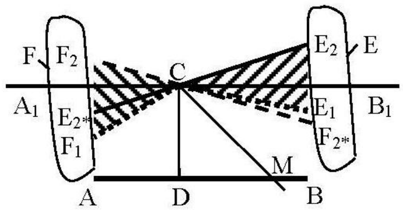

Рис. 4.3.1. Постулат Лобачевського стосовно двох паралельних ліній

1. Прямі CF та CE є граничними і не перетинають пряму AB, а в точці C кожна з них має (через невизначеність похибки вимірювання паралельності прямих) по два невідомі взаємно виключні (несумісні) варіанти границь, сукупність яких розділяється на дві пари – пару з нахилом до прямої AB (CF_1,CE_1) та пару з нахилом від прямої AB (CF_2,CE_2). Пару (CF_2,CE_2) вилучають з аналізу і ураховують границі (CF_1,CE_1) з нахилом до прямої AB. Але до аналізудодають ще дві додаткові границі (CF_{2*}, CE_{2*}), які ураховують, що прямі CF_2 та CE_2 (при їх продовженні по обидві сторони від точки C до перетинання з AB) теж утворюють для прямої CM границі перетинання прямої AB. У результаті в аналізі ураховуються чотири варіанти граничних прямих: (CF_1, CE_{2*}) – для точки F та (CE_1, CF_{2*}) – для точки E.

2. З нескінченної множини прямих, що перетинають AB, усяка пряма CM перетинає пряму AB у деякій точці M, якщо проходить всередині більших за нуль кутів, обмежених граничними прямими (CF_1, CE_{2*}) ліворуч від перпендикуляра CD та обмежених граничними прямими (CE_1, CF_{2*}) праворуч від перпендикуляра CD.

Нижче доводиться, що кожен з можливих 4-х варіантів кутів для прямої CM:

$$(<F_1CE_1,\ <F_1CF_{2*},\ <E_{2*}CE_1,\ <E_{2*}CF_{2*},\ E_1C\,F_1,\ <E_1CE_{2*}, < F_{2*}C\,E_{2*},\ < F_{2*}CF_1),$$

з яких вилучаємо однакові кути, мають більші за нуль залишкові значення ($<F_1CE_1$, $<F_1CF_{2*}$, $<E_{2*}CE_1$, $<E_{2*}CF_{2*}$).

Наведемо для кожного з 4-х варіантів відповідні розрахунки:

I ВАРІАНТ (кут ($<F_1CE_1$)>0) – співпадає з постулатом Лобачевського):

$$<F_1CE_1=<F_1CD+<DCE_1=(<A_1CD-<A_1CF_1)+(<DCB_1-<B_1C\,E_1)=(\pi/2-<A_1CF_1)+(\pi/2-<B_1CE_1)$$
$$\pi-(<A_1CF_1+<B_1C\,E_1)=0\ldots\pi,$$

де $0<(<A_1CF_1)<\pi/2;\ 0<(<B_1C\,E_1)<\pi/2$.

На практиці кожен з кутів ($<A_1CF_1$;$<B_1C\,E_1$) не може дорівнювати π/2, бо це означає, що замість паралельної прямої CF_1 та CE_1 інструментальними засобами наведені перпендикулярні прямі. Тобто, кут $<F_1CE_1$ завжди є меншим за π. Одночасно кожен кут ($<A_1CF_1$; $<B_1C\,E_1$) є більшим за 0, оскільки вони є похибками вимірювання, про що свідчать їх візуалізовані значення на рис. 4.3.1.

II ВАРІАНТ (кут ($<F_1CF_{2*}$)>0):

$$<F_1CF_{2*}=<F_1CD+<DCF_{2*}=(<A_1CD-<A_1CF_1)+(<DCB_1-<B_1CF_{2*})=(\pi/2-<A_1CF_1)+(\pi/2-<B_1CF_{2*})=\pi-(<A_1CF_1+<B_1CF_{2*})=0\ldots\pi,$$

де $0<(<A_1CF_1)<\pi/2;\ 0<(<B_1CF_{2*})<\pi/2$.

На практиці кожен з кутів ($<A_1CF_1$; $<B_1CF_{2*}$) не можуть дорівнювати π/2.

III ВАРІАНТ (кут ($<E_{2*}CE_1$)>0)):

$$<E_{2*}CE_1=<E_{2*}CD+<DCE_1=(<A_1CD-<A_1CE_{2*})+(<DCB_1-<B_1CE_1)=(\pi/2-<A_1CE_{2*})+(\pi/2-<<B_1CE_1)==\pi-(<A_1CE_{2*}+<B_1C\,E_1)=0\ldots\pi,$$

де $0<(<A_1CE_{2*})<\pi/2;\ 0<(<B_1CE_1)<\pi/2$ – тому що похибка інструментів не може перевищувати π/2.

На практиці кожен з кутів ($<A_1CE_{2*}+<B_1C\,E_1$) не можуть дорівнювати π/2.

IV ВАРІАНТ (кут ($<E_{2*}CF_{2*}$)>0)

$$<E_{2*}CF_{2*}=<E_{2*}CD+<DCF_{2*}=(<A_1CD-<A_1CE_{2*})+(<DCB_1-<B_1CF_{2*})=(\pi/2-<A_1CE_{2*})+(\pi/2-<B_1CF_{2*})==\pi-(<A_1CE_{2*}+<B_1CF_{2*})=0\ldots\pi,$$

де $0<(<A_1CE_{2*})<\pi/2;\ 0<(<B_1CF_{2*})<\pi/2$.

На практиці кожен з кутів ($<A_1CE_{2*}$; $<B_1CF_{2*}$) не можуть дорівнювати π/2

4.3.2. Уточнення деяких тверджень з геометрії Лобачевського. У спрощеному вигляді можна стверджувати, що геометрія Лобачевського ***на практиці*** охоплює геометрію Евкліда (рис. 4.3.1):

– у межах практичних числових відстаней до «початку нескінченності», дві паралельні лінії CFта CE «виконують обов'язки» однієї паралельної лінії Евкліда;

– додатково в геометрії Лобачевського доводиться, що, якщо деяка пряма CM перетинає паралельні лінії CF та CE, то вона перетне й AB. З цим можна погодитися.

Але саме тут прихована помилка Лобачевського. У арифметичному просторі змінних похила CE завжди перетне AB при будь-якому чітко визначеному куті ω<90° (рис. 4.3.1). Можна лінгвістично скільки завгодно стверджувати (у аксіомах), що прямі (CF, CE) є паралельними до AB, тому що з малюнку видно – вони дійсно не перетинаються з AB. *Але арифметика свідчить – все ж перетинаються*.

Спробуємо врахувати похибки вимірювання.

Будемо вважати, що у загальному випадку вимірювальні засоби нездатні точно визначити кут ω і вимірюють його з похибкою ±ε. Тоді кут паралельності має числове значення у межах (90°-ε)≤ω<(90°+ε). Але, внаслідок того, що ймовірність точного отримання ω= 90° дорівнює нулю (це видно з інтегралу кутів похибок), то прямі (CF,CE) з ймовірністю 100 % точно перетнуть пряму AB (до 50 % ймовірності перетинання належить кожному кінцю прямої CE або CF, якщо їх продовжити по обидві сторони від точки C). Але тоді постулат паралельності прямих Лобачевського набуває іншої форми:

Через точку C, яка лежить зовні прямої AB у площині ABC можна провести такі паралельні до AB дві прямі лінії CE та CF, які продовжуються по обидві сторони від точки C і мають наступні властивості:

1) кожна з паралельних прямих CE та CF з ймовірністю 100 % перетинається з прямою AB (до 50 % ймовірності з кожного боку);

2) уся нескінченна множина прямих, що проходить у заштрихованих кутах похибок, є паралельною до AB.

3) усяка пряма CM, що проходить усередині кута FCE перетинається з прямою AB у деякій точці M.

Якщо б ми були здатні ***точно без похибок*** вимірювати кут паралельності, то знали б з вимірів та числових розрахунків (не з аксіом), що при ω<90° пряма CE перетинається з AB праворуч від перпендикуляра CD, що при ω=90° пряма CE є паралельною до AB, що при ω>90° пряма CE перетинається з AB ліворуч від перпендикуляра CD,

Таким чином, можна вважати, що ***жодної суперечливості між постулатами Евкліда та Лобачевського не існує:*** Евклід розглянув паралельні прямі «без похибок» у чіткому та конкретному арифметичному просторі змінних, а Лобачевський – у ділянці похибок вимірювання. Твердження геометрії Лобачевського є правильним у 50 % випадків. Інші 50 % прийдуться на протилежні реальні твердження, які не вміщують похибок у заштрихованих на рис. 4.3.1 кутах.

Нижче аналізуються основні положення геометрії Лобачевського з використанням нумерації розділу 3.3.

3.3.2 Як розглянуто вище, кут паралельності може бути гострим ω<90° у 50 % випадків, а промінь CM у 50 % випадків може перейти границю похибок CE. Пряма CM або перетинає паралельні лінії, або попадає у заштриховані кути і стає паралельною до AB. Відповідно кут ω< 90° у 50 % є границею кута α.

3.3.3. Щоб пряма CE стала паралельною прямій AB, не обов'язково точці M ***необмежено віддаляється у нескінченність по прямій AB:*** достатньо CM зайти у цілком реальний кут похибок вимірювання. Кут паралельності ω не залежить від стрілки CD: він залежить від похибки вимірювання паралельності.

3.3.4. Усі шість основних теорем геометрії Лобачевського спираються на твердження «від протилежного»: «висновок є неправильним, оскільки він підтверджує 5-й постулат Евкліда, який суперечить постулату Лобачевського (*речення авторів статті*)». З рівним успіхом доведення теорем можливе для випадку ω< 10°.

3.3.5. Отримані в геометрії Лобачевського фігури ***конуса паралельності***, який утворюється при обертанні креслення рис. 3.3.1 навколо перпендикуляра CD, відносяться до 50 % похибок визначення паралельності.

3.3.6. Не може класична механіка, фізика та астрономія змінюватись у зв'язку з розрахунками у полі похибок.

Для пояснення пропонованих уточнень у постулаті Лобачевського, потрібно звернутися до практики. При практичному проведенні паралельної прямої CE внаслідок похибки сучасних засобів вимірювання з ймовірністю 50 % можна вважати кут ω< 90° та з ймовірністю 50 % можна вважати кут ω> 90°. Ймовірність стабільного отримання ω=900 дорівнює нулю. Тобто, пряма CE практично ніколи не є паралельною (що підтверджується заштрихованими ділянками рис. 3.3.1 у геометрії Лобачевського [4, креслення 16, с. 41]). Абсолютно чітко провести паралельну пряму неможливо, що передбачав Евклід, який використав нерівність замість рівності при визначенні паралельності прямих.

Виникає також питання: відрізок DM (рис. 3.3.1) не може набувати значення «нескінченності», тому що кут ω<90° [4, с. 41]), і тоді пряма CE перетинається з AB у розрахованій точці.

4.4. АНАЛІЗ ГЕОМЕТРІЇ РІМАНА. Відомо, що двовимірна Система Координат Рімана[5, с. 987] схожа на Сферичні Координати, але дві «прямі», що проходять через центр координат сфери, мають не дві, як у сферичній, а лише одну ***точку перетину*** (рис. 4.4.1).

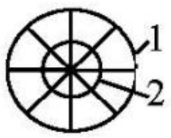

Рис. 4.4.1. «Сферична площа» Рімана

Але в рамках двовимірної системи координат Рімана ніхто не забороняє отримати коло 2, лінії якого є паралельними (не перетинаються) з колом 1. Заборона кіл 1 та 2 означає відрив від практики.

4.5.ГЕОМЕТРІЯ ГІЛЬБЕРТА. Згідно з аксіомою Гільберта «$З_1$. Якщо задані відрізок AB і промінь OX, то на промені OX існує точка B* така, що відрізок AB є конгруентним відрізку OB*, тобто AB≡OB*» [6, с. 970]: промінь OX, який повинен бути продовжений «у нескінченність», у дійсності ***вимірюється за рахунок введеної конгруентності***. Але тоді координатний простір змінних в Системі Координат Гільберта не відрізняється від простішої Системи Координат Евкліда без нескінченності.

Висновки.

1. У аксіоми не можна вводити не підтверджені розрахунками нескінченно великі та нескінченно малі числові дані.
2. Евклідові та неевклідові геометрії є сумісними, а їх суперечливість пояснюється аналізом різних ділянок даних та різницею у математичних моделях.
3. Геометрія Лобачевського охоплює геометрію Евкліда з додаванням до неї аналізу діапазону похибок.
4. Довільна пряма із застосуванням «нескінченно малих m» та «нескінченно великих M» складається з трьох ділянок, взаємно суперечливих стосовно їх числових даних.
5. До аналізу постулатів можна залучати лише відрізки прямих з чіткою довжиною. Потрібно дотримуватись певних правил у розрахунках функціональних залежностей.
6. Запропоновані уточнення в евклідову та неевклідову аксіоматику.
7. Числові значення функціональних залежностей мають перевагу над їх лінгвістичними оцінками.
8. Стосовно паралельності прямих: не можна вимагати, щоб різні математичні моделі **«*зробили однаковими*»** за допомогою лінгвістичних аксіом та щоб різні ділянки паралельних прямих описувались однаковими числовими результатами без впливу відстаней.

Список використаних джерел

1. Гриньков В. В., Кириченко І. К. Аналітична геометрія. – Харків : Гімназія, 2008. – 340 с.
2. Кутковецький В. Я. Теорія візуалізації багатовимірних об’єктів аналітичної геометрії. // Наукові праці : наук. журн. Серія: «Педагогіка». – Вип. 301. – Т. 313. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2018. – С. 31–41.
3. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. – Т.1. Сочинения по геометрии. – М. – Л. : Гостехиздат, 1946. – 415 с.
4. Костюк В. И. Лобачевский и его геометрия. – Горький : Горьковское областное изд-во ОГИЗ, 1947. – 76 с.
5. Математическая энциклопедия. – Т.4, Ок-Сло. – М. : Сов. Энциклопедия, 1984. – 1216 с.
6. Математическая энциклопедия. – Т.1, А-Г. – М. : Сов. Энциклопедия, 1977. – 1152 с.
7. Кутковецький В. Я. Аналітична геометрія в n-вимірних тілесних кутах // Наукові праці : Науково-методичний журнал. – Вип. 254. – Т. 266. Комп’ютерні технології. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2015. – С. 30–41.
8. Кутковецький В. Я., Турти М. В. Одновимірна аналітична геометрія багатовимірного простору для візуалізації чітких або однозначних нечітких оцінок вихідних функцій. // Наукові праці : наук. журн. Серія : «Педагогіка». – Вип. 301. – Т. 313. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2018. – С. 25–30.
9. Кутковецький В. Я. Теорія кластерів. // Наукові праці. Серія «Комп’ютерні технології». – Вип. 305. – Т. 317. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2018. – С. 63–69.

В. Я. Кутковецкий,
ЧНУ им. Петра Могилы, г. Николаев, Украина,
М. В. Турты,
НУК им. Макарова, г. Николаев, Украина,

УТОЧНЕНИЕ АКСИОМАТИКИ И АРИФМЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ В ЕВКЛИДОВОЙ И НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

Аксиоматика эвклидовой и неэвклидовых геометрий оказала большое и полезное влияние на математику. Но никто не заметил, что в геометри ***практически*** *введены неопределенные символы безконечно малых $m = 1 / \pm \infty$ и безконечно больших $M = \pm \infty$ чисел (****эти символы (m, M) авторами искусственно введены в аксиоматики для удобства анализа****). Эта замена цифр символами привела к* ***неслыханным в математике последствиям****: - практическому запрету арифметических операций и к их неповторяемости при определении их влияния на цифровой анализ; – возможности пренебрежения методом цифрового анализа, по которому нельзя вместо цифр вводить в расчеты нечеткие и неопределенные символы (m, M); – предоставление в цифровом анализе преимуществ лингвистике (аксиомам) вместо арифметики. Пример (сумма двух отрезков): $s = a + b = a = \infty = const$ при $a = \infty$; $s = a + b = b = const$ при $a = 1 / \infty$. Если, вместо запрета расчетов, считать ∞ и $1 / \infty$ конкретными числами (даже символьными), то запрета не возникает: $s = \infty + b$ и $s = 1 / \infty + b$. В статье уточнена аксиоматика геометрий; показана противоречивость анализа для трех частей линии; предложены для параллельных прямых уточненный 4-вариантный постулат Лобачевского и постулат с цифровыми признаками параллельности; рассмотрены параллельные линии в геометри Римана.*

Ключевые слова*: геометрия; аксиоматика; Евклид; Лобачевский; Риман; Гильберт.*

V. Kutkovetsky,
Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolaiv, Ukraine,
M. Turty,
NUK them. Makarova, Nikolaev, Ukraine,

REFINING AXIOMATICS AND ARITHMETIC CALCULATIONS IN EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES

The axiomatics of Euclidean and non-Euclidean geometries had a great and useful influence on mathematics. But noone noticed that indefinite symbols of infinitesimal $m = 1 / \pm \infty$ and infinitely large $M = \pm \infty$ numbers were practically introduced in geometry (the authors artificially introduced these symbols (m, M) to axiomatics for ease of analysis). This replacement of numbers with symbols led to unheard-of consequences in mathematics: – the practical prohibition of arithmetic operations and the iruniqueness in determining the ireffectondig it alanalysis - the practical prohibition of arithmetic operations and the not repeatability of calculationss in determining the ireffectondig it alanalysis; – the possibility of neglecting the method of digital analysis, according to which it is impossible to introduce fuzzy and indefinite symbols (m, M) instead of numbers; – providing with the advantages linguistics (to axioms) instead of arithmetic in digital analysis. Example (the sum of two segments): $s = a + b = a = \infty = const$ at $a = \infty$; $s = a + b = b = const$ at $a = 1 / \infty$. If, instead of prohibiting calculations, consider ∞ and $1 / \infty$ as specific numbers (even symbolic), then there is no prohibition: $s = \infty + b$ and $s = 1 / \infty + b$. In the article was defined the axiomatics of geometries; inconsistency of analysis for three parts of the line is shown; for parallel lines, the updated four-variant Lobachevsky's postulat and digital signs of parallelism are proposed; the parallel lines of Riemann geometry are described.

Key words: *geometry; axiomatics; Euclid; Lobachevsky; Riemann; Hilbert.*

Рецензенти: **Мещанінов О. П.,** *д-р. пед. наук, професор;*
Мусієнко М. П., *д-р. техн. наук, професор.*

Дата надходження статті до редколегії 24.12.19