УДК 371.302+378.937+371.31

Ковальчук В. В., Клименко А. М., Возна Т. М.

МЕТОД АНАЛОГІЇ ТА ПОРІВНЯННЯ У ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУКАХ

Статтю присвячено систематизації методів навчання дисциплін природничого циклу. Запропоновано впровадження принципу аналогій до процесу викладання. Акцентовано увагу на історіографічних аспектах навчання.

Ключові слова: *аналогії, навчання, концепція, творчість.*

Статья посвящена систематизации методов обучения дисциплин естественнонаучного цикла. Предложено внедрение принципа аналогий в процес преподавания. Акцентировано внимание на историографических аспектах обучения.

Ключевые слова: *аналогии, обучение, концепция, творчество.*

The article is devoted to systematic methods of teaching science disciplines cycle. We propose the implementation of the principle analogy in the process of teaching. The attention to historiographical aspects of the training.

Key words: *analogy, learning, vision, creativity.*

Вступ. На сьогодні, як показує практика, ще не зовсім розв'язана проблема щодо виявлення задатків та нахилів учнів, студентів до творчої діяльності. Тому є потреба, щоб вчителя фундаментальних дисциплін, зокрема, математики і фізики, правильно розуміли такі категорії, як задатки і здібності, зокрема творчі здібності, і були ознайомлені хоча б з одним із доступних для них методом їх діагностики [1; 2].

Головна ідея статті – розробка пропозицій щодо мотивованого вивчення точних наук (особливо математики, фізики, інформатики) на ґрунті індивідуального підходу до шкільного колективу. Така методика повинна впроваджуватись етапами, алгоритмізовано, причому кожний з етапів повинен охоплювати як можна більше наукових складових, більше методологічних принципів і концепцій у тому вигляді, який є доступним для учнів, студентів. При цьому, немає необхідності вдаватися відразу до повного засвоєння знань. У процесі вивчення слід постійно повторюватися, знову і знову повертатися до вивчення певної теми, розділу через визначені інтервали часу і проходячи весь шлях вивчення майже з самого початку. Саме у цьому полягає структурування процедури навчання, його алгоритмізація. Такий спосіб вивчення називається алгоритмічно-концентричним, або багаторазовим.

У статті наведено алгоритмізований аналіз методичних питань щодо викладання природничих дисциплін, що є розвитком ідеї концептуального підходу у навчанні [3]. Об'єктом дослідження є процес навчання логічному мисленню, алгоритмізації, будувати концепції засвоєння нових знань. Предмет дослідження утворила процедура складання алгоритмів до побудови системи навчальних фреймів направлених на вивчення певних розділів фізики і математики.

Квантова фізика – історичний аспект. 1924 рік. Швейцарія. Цюріх. Професор фізики місцевого університету Ервін Шрьодінгер, аналізуючи дисертаційну роботу Луі де Бройля, у якій рух вільних частинок зіставлявся з деякими хвилями матерії, поставив цілком закономірне питання: що ж це за хвилі, як їх інтерпретувати? Чи можливо, щоб частинка водночас володіла і хвильовими властивостями? На ті часи усе це було абсолютно не зрозумілим. Навіть зараз до кінця це питання залишається нез'ясованим. І тут можна послатися на такі авторитети, як Річард Фейнман, Поль А. Дірак та ін. При всіх блискучих успіхах квантової теорії, при всіх її фантастичних досягненнях, при тім, що в наші дні її розділи стали вже інженерними дисциплінами (наприклад, такі, як мікроелектроніка, мікромеханіка), логічна структура теорії, її сутність дотепер є досить складною для розуміння багатьох, навіть фізиків, фахівців. Варто зазначити, що Е. Шрьодінгеру була «несимпатична» концепція «квантових стрибків», висунута Нільсом Бором. З іншого боку, мав місце безсумнівний експериментальний факт: атомні спектри дискретні, а теорія Н. Бора – подобається вона чи ні – усе-таки, пояснює закономірності цих спектрів.

Добре відомо, що у класичній фізиці існують дискретні рішення. А саме, – це теорія хвиль. Наприклад, струна, що закріплена на кінцях, може коливатися лише з визначеними частотами. Число можливих частот є нескінченним, але їх значення щораз строго визначені. Вони не можуть бути будь-якими. Це дискретний набір частот. Усі частоти кратні одній – основній. Те ж саме має місце при коливаннях мембран, повітря в органних трубах тощо. До речі, якщо бути коректним, неясну ідею про те, що частинки можуть мати хвильові властивості, до Луї де Бройля висловлював А. Ейнштейн, а до нього і сам І. Ньютон [6]. Власне А. Ейнштейн першим звернув увагу наукової громадськості на роботи Луї де Бройля, характеризуючи словами: «Це робота або божевільного, або ж генія». Проте більшість фізиків сприйняли ідеї Луї де Бройля досить скептично. Більшість, але не Е. Шрьодінгер. Він вирішив спробувати «вигадати» хвильове рівняння для самої елементарної на той час частинки – електрона, а потім і атома. Його спроба ґрунтувалася в проведенні певної аналогії між мікрочастинкою і струною, або ж, коливаннями рідини в судині, а може бути, навіть, коливаннями електромагнітного поля у резонаторі. На той час було добре відомо, що коливальні процеси зустрічаються у всіляких розділах фізичної науки. Але при цьому, коли записувалися хвильові рівняння, «закладалося», щонайменш, поняття про те, який же фізичний зміст має функція, для якої написане рівняння. Щодо Е. Шрьодінгера було все інакше. Він, записуючи своє хвильове рівняння, до кінця зовсім не розумів фізичний зміст хвильової функції. Більш того, Е. Шредінгер визнавав, що навіть не підозрював, який успіх очікує його «винахід». Він просто намагався і пробував. Пробував, тому що інтуїція підказувала йому: тут щось є. Але перша спроба, як свідчить П. Дірак, закінчилася сумно. Е. Шрьодінгер помилився (хоча, не помилився, а, усього лише, не врахував спін електрона, тоді ще невідомий). Результати теорії не збігалися з експериментом. Реакція була типової для фізиків: якщо теорія не погоджується з експериментом, метод є порочним. Наукові дослідження на кілька місяців були припинені. Пізніше проф. Шрьодінгер помітив: якщо обмежитися приватним нерелятивістським випадком його теорії, то вона дає правильні результати. Саме після цього він і опублікував свою роботу, першу з тих, котрі привели до створення нового розділу фізики – хвильової (або квантової) механіки.

Який же висновок випливає з цього? У настільки грубій і неточній схемі можна «впізнати» методологію відкриття фізика-теоретика (у вищеописаному випадку – геніального). Ніякої логічної строгості. Усього лише здогадка, яка ґрунтується на інтуїції та аналогії. Як критерій – порівняння з експериментом. І, якщо якась, нехай зовсім неясна, але внутрішньо несуперечлива логічна схема призводить до збігу з експериментом – виходить, «щось є». А що саме – покаже майбутнє. Як це було з Е. Шрьодінгером, тією людиною, що «вгадала» істину незначного шматочка реальної картини світу.

І ще: теорія повинна бути красивою. Фізик не завжди може логічно обґрунтувати нові ідеї. Тому він апелює до інтуїції. А якщо так – краса далеко не останній аргумент. Про це багато і наполегливо говорив А. Ейнштейн. Звичайно, може виявитися (і це було неодноразово) збіг з експериментом – це чисто випадкова подія.

Потому зупинимося далі на порівнянні систематичного, аксіоматичного (чи дедуктивного) підходів у математиці.

Про вольовий підхід у аксіоматиці. На перший погляд здається: *систематичний* стиль мислення є цілком протилежним підходу, що повинен використовувати фізик. Більше того, такий підхід не підтримує широка «фізична громадськість» і тому відношення до нього – вороже. Це так лише на перший погляд. Реально ж – усе не так просто, як здається. Для цього розглянемо інший підхід, зовсім протилежний – *аксіоматичний* чи *дедуктивний*.

Ще за часів Евкліда у математиці (у будь-якому з її розділів) повновладно працює аксіоматичний метод. У грубих рисах він зводиться до наступного: математик будує деяку абстрактну аксіоматичну (дедуктивну) систему. Це означає що:

– Вводиться деяке число первинних об’єктів, понять – як завгодно. Вони не визначаються, лише називаються. Наприклад, у звичайній геометрії – це точка, пряма і т. ін.

– Вводяться первинні невизначені співвідношення (зв’язки) між цими об’єктами. Наприклад, точка A лежить між точками B і C, або точка A належить прямій P.

– Поняття і співвідношення утворюють мову, якою далі й оперують. Усі вимоги стають зовсім ясними, як тільки вводиться поняття «аксіома».

– Довести яку-небудь теорему (твердження) у дедуктивній системі – значить показати, що ця теорема складає необхідний логічний наслідок раніше доведених теорем, які було доведено на основі інших теорем, що... і т. д.

Зрозуміло, цей нескінченний ланцюжок міркувань можна обірвати лише *вольовим* чином – у протилежному випадку процес будь-якого доказу виявиться нескінченним і, отже, безглуздим. Тому деякі теореми приймають, як «дані з вище»: вони «первинні» і доказу не потребують. Такі «деякі теореми» мають назву *аксіом* чи *постулатів*. А це вже, мовою теології, – ***«символи віри»*** у певній області математики. Використовуючи армійську мову, – це ***«статут вартової служби»***. А статути, як правило, не обговорюються, а виконуються!?.

Таким чином, на основі аксіом математик доводить або спростовує (точніше – намагається довести або спростувати) всі інші теореми чисто логічним шляхом. Обрані кимось, базисні аксіоми повинні задовольняти досить твердим вимогам:

– система аксіом була несуперечливою, тобто логічним наслідком аксіом не можуть виявитися суперечливі одна до одної теореми;

– система аксіом була повною: будь-яке твердження в аксіоматичній системі можна довести або спростувати.

Це створює ідеал математики. Однак у 1930 р. К. Гьодель, довів, що для будь-якої досить змістовної, багатої аксіоматичної структури (наприклад, арифметики) останню вимогу взагалі неможливо виконати:

завжди знайдеться твердження, яке не можна ні довести, ні спростувати. Звичайно, це твердження можна назвати новою аксіомою. Але тоді у виправленій системі знову знайдеться твердження, яке не можна... І так до нескінченності.

Тому бажано, щоб:

– система аксіом була незалежною, тобто, щоб до аксіом «не затесалася» така теорема, яку не можна було б вивести на підставі інших аксіом.

– аксіом не було занадто багато і вони були досить простими, тобто цілком природними.

У протилежному випадку від аксіом просто мало користі.

Вибір тієї чи іншої системи аксіом певною мірою є довільним. Але будь-які різні системи повинні задовольняти вимогам а) і б).

Зрозуміло, що йдеться про необхідність введення первинних об'єктів і основних співвідношень між ними, то буквально повторюватиметься вся логіка, яка привела до необхідності появи аксіом.

Наприклад, нехай доводяться які-небудь теореми для трикутника... чи семикутника, чи куба. Насамперед, само собою, варто визначити, що це за «звірі». У процесі визначення за допомогою більш простих об'єктів неодмінно дійдемо висновку щодо необхідності обірвати (у якусь мить) ланцюжок визначень. Або ж – оголосити якісь об'єкти первинними. Причому ці об'єкти не визначаються, а просто називаються. У неявному вигляді властивості первинних об'єктів (чи понять) визначаються аксіомами. Отже, лише після введення аксіоматичної системи, тріумфує строга бездоганна логіка. Повна протилежність роботі фізика-теоретика!

Усе це дуже красиво, навіть привабливо і, як всяка *ідеальна схема*, має *до реального життя* дещо віддалене відношення.

Математичні приклади. Абстрактні логічні схеми, що були вигадані або знаходяться поза всяким зв'язком з реальністю, або ж застосовувались для суто спеціальних і малоцікавих задач, раптом виявилися ідеальним і могутнім інструментом для пізнання реального світу.

Приклад. Один з багатьох, але, може бути, найефектніший.

У наші часи теорія ймовірностей [4] – це математичний фундамент і квантової механіки, і статистичної фізики [5]. Теорія ймовірностей застосовується при визначенні структури галактик, обчисленні швидкостей хімічних і ядерних реакцій, розрахунків суми страхових премій, складанні артилерійських таблиць і... простіше перерахувати, де її немає. Коли ж теорія ймовірностей «народилася на світ» (приблизно 400 років тому), її використовували винятково для проведення аналізу лише азартних ігор. Проблема, безсумнівно, прикладна, хоча для деяких – дуже актуальна, тобто не фундаментальна і не всеосяжна.

Теорія ймовірностей – найцікавіший розділ математики, тому що вона встановлює чіткі, строгі закономірності для тих явищ, де споконвічно ніяких законів начебто б немає. Кожна окрема подія з досконалістю є випадковою. Обмежимося зауваженням: виняткове значення теорії ймовірностей – у тому, що дуже часто «наївний здоровий глузд» (чи інтуїція) не в змозі навіть грубо угадати її висновки. Більш того, висновки теорії можуть просто суперечити інтуїтивним уявленням.

Ще один цікавий приклад. У військових, лікарів, геологів існує «закон парних випадків». Суть у тім, що якщо відбулася якась неординарна подія (катастрофа, рідке захворювання і т. ін.), тоді у той же день (чи незабаром) аналогічна подія незалежно повториться ще раз. Це здається настільки дивним, що, виникли навіть мнемонічні, навіть містичні резони.

Насправді тут є елементарні, але вражаючі уяву наслідки, усього лише, теорія ймовірностей плюс «разюча» властивість людської психіки – запам'ятовувати, власне, дивні і незрозумілі, на даному етапі, події.

Інший приклад. Ще в стародавності греки, індуси, китайці, єгиптяни знайшли чудові закономірності й чудові загадки властивостей чисел, причому з практикою це не мало ніякого зв'язку. Але усе було настільки красиво і загадково, що математики займалися абстрактними об'єктами інтелекту, навіть з більшим захопленням, аніж геометрією, астрономією чи створенням механізмів. З'явилася ідея: числа – це деяка мова богів, вони уособлюють вищу ідею світобудови, виражають щось таємне. Правда, ні тоді, ні тепер ніхто не зміг би роз'яснити точний зміст такого роду констатацій, але деякий резон тут є. Досліджуючи властивості чисел, греки просунулися істотно. Ці ідеї (у греків найбільше запекло їх проповідували піфагорійці) вплинули на математиків і фізиків у середині століття (у наші дні вони також викликають істотний інтерес!!!).

Математиків завжди вражає відкриття ірраціональних чисел. Світ чисел виявився значно багатшим і складнішим, аніж уявляли собі спочатку давні люди. Поява ірраціональних чисел була продиктована геометрією, хоча Евклід довів свою знамениту теорему суто алгебраїчно. Зараз це – добре відома шкільна теорема: якщо n/m – нескоротний дріб, то не існує таких n і m, щоб виконувалася тотожність $n^2/m^2 = 2$. Ірраціональні числа смутили адептів божественного порядку у світі чисел, але не похитнули їх. З теореми, зокрема, випливає: ірраціональних чисел виду, наприклад, корінь n-ого ступеня з p, де n – натуральне, а p – просте, незмірно більше, аніж раціональних. Помітимо, утім, що насправді проблема – «чого більше» «хитріша», якщо розмова йде про «нескінченність».

Теорія множин тоді, звичайно, була невідомою галуззю науки, але проста ідея, що кожному раціональному числу (чи цілому дробу) можна поставити у відповідність нескінченно велику кількість ірраціональних чисел, – безперечно, була зрозумілою для грецьких математиків.

У ту ж епоху виникає теорія чисел – можливо, найдивніша галузь математики. Протягом двох з половиною тисячоліть кращі науковці світу намагаються знайти загадкові закони царства цілих чисел. І, в першу чергу, з давніх часів (і до наших днів) приваблювали математиків прості числа. Майже кожний з великих (у більшій чи меншій мірі) віддав данину теорії чисел. Зокрема вивченням простих чисел займалися Евклід, П'єр Ферма, Леонард Ейлер, Карл Фрідріх Гаус. Останній захоплено писав: «Математика – цариця наук, а теорія чисел – цариця математики». Це думка «короля математиків» і тому вона заслуговує інтерес. Парадоксально дивна краса теорії чисел, насамперед, виявляє себе в чарівній простоті формулювання неймовірних за складністю теорем.

Згадаємо, наприклад, відому проблему близнюків. Серед простих чисел зустрічаються дивні пари: 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43... і т. ін. Чи обірветься де-небудь цей ряд, чи він продовжується до нескінченності? Як бачимо, формулювання теореми є простим, і, навіть, зрозумілим здатному учню другого-третього класу. Але ні Ейлер (а він – геній), ні Гаус (і він був генієм) і ніхто інший з сотень блискучих розумів не знайшов відповідь на це питання до наших днів.

Усьому світові відома велика теорема Ферма. Загадка Ферма «мордувала» математиків світу понад три століття. Утім, головна загадка теорії чисел в іншому. Так, математики переконані в її винятковому значенні для науки. Ця майже містична віра насправді визначається в кінцевому рахунку одним аргументом – красою. Отож, теорією чисел захоплюються всі, але скільки-небудь її помітного впливу на інші розділи математики досі не спостерігається. Тим більше не використовується теорія чисел у прикладних задачах (рідкісні винятки лише підтверджують правило).

Навпаки, у теорії чисел використовують сьогодні найвитонченіший математичний апарат, залучають зовні дуже далекі розділи математики. Глибоким, але не зовсім зрозумілим, є зв'язок теорії чисел з іншими розділами математики, який вже встановлено, однак цей зв'язок є однобоким. Але хто знає, що буде завтра. В історії математики (і теоретичній фізиці) багато разів випадало, що яка-небудь приватна, начебто ізольована від іншої математики теорія зненацька виявлялася на генеральному напрямку розвитку науки і, більш того, адекватно описувала нововідкриті закони фізики.

Функціональний аналіз, теорія груп, геометрія скривлених просторів – усе це сьогодні робочий апарат квантової механіки і космології. У XIX ст. абстрактні розділи математичної логіки були цікаві десятку-другому невідомих диваків, провінціальних професорів. Зараз їх вивчають (зі змінним успіхом) тисячі студентів на математичних, економічних та інших природничих факультетах.

Математики часто-густо «переходять» на мову поетів. Критерій – деяка незрозуміла, загадкова внутрішня краса, що заполоняє і фахівця, і дилетанта. Це перший і, мабуть, головний критерій для оцінки наукових праць з математики. От що писав, наприклад, чудовий англійський математик Г. Х. Харді: «Математик так само, як художник чи поет, створює візерунки. І якщо його візерунки більш стійкі, то лише тому, що вони складені з ідей... Візерунки математика так само, як візерунки художника чи поета, повинні бути прекрасні; ідеї так само, як кольори слова повинні відповідати один одному. Краса є першою вимогою: у світі немає місця для некрасивої математики».

До речі, фізики при проведенні оцінок нових результатів (як теоретичних, так і експериментальних) цілком солідарні з математиками і також апелюють до загадкової краси.

Біда в тім, що краса – настільки хитке, невизначене поняття, що ніяка логіка не зможе пояснити, що це, власне, таке. Саме тут усе і починається. Теорія, чудово красива для фізика, математику може стати як досить нескладний набір зовсім нелогічних, неясних і невизначених ідей. Напроти, фізик може відмахнутися від будь-якого винятково-витонченого і важливого (для математика!) аксіоматичного обґрунтування. Наприклад, від строгого обґрунтування інтегрального числення, чи – від теорії ймовірностей! Однак нічого ясного з цього приводу ніхто сказати не в змозі, так само, як неможливо пояснити чарівність музики Моцарта чи Бетховена. (Якщо тільки ви не музичний критик, звичайно!) До речі, математики дуже полюбляють порівнювати теорію чисел з музикою, підкреслюючи її «духовну сутність». Але простому громадянину не зрозуміти красу математики, як математику, може бути, не зрозуміти, чому красивими є усі коти, і чим, власне, конкретна Мурка гарніша за конкретного Барсика? Легко переконатися, що сформулювати скільки-небудь логічну відповідь практично неможливо.

Повернемося від котів до математики і фізики. Нагадуючи при цьому, що фізикам-теоретикам у деякому змісті простіше: для оцінки нової теорії у них є, принаймні, два ясних показники. А саме. *По-перше*, теорія повинна добре і послідовно пояснювати відомі експерименти. Але це усього лише необхідно, але недостатньо, – як люблять говорити математики. Тому, *по-друге*, – і, може бути, головне! – теорія повинна бути евристичною. Інакше кажучи, теорія повинна пропонувати нові експерименти і, найважливіше, пророкувати їх результати. При формулюванні нової фундаментальної ідеї від автора не вимагають якого-небудь послідовного обґрунтування. Коль задоволені дві вище означені вимоги, теорія має право на життя. Але далі, при розробці ідеї, автор зобов'язаний діяти за правилам логіки. Тут варто знову згадати про квантову механіку [5]. Часто можна почути: у старій фізиці усе було ясно і зрозуміло. Але в XX столітті фізики усе заплутали. Про це говорилося раніше.

Насправді, в класичній фізиці, як тільки її застосовували для виявлення властивостей речовини, то ставало незрозумілим все. Більше того – ґрунт фізичної науки виявлявся зовсім суперечливими. Але... результати були чудовими! Це головна розбіжність між фізиками і математиками. На закінчення у вигляді таблиці наведемо формальну аналогію, власне, математичну симетрію форм запису різних за фізичною сутністю таких процесів як періодична зміна електричного заряду (q) і значення струму (I) у електромагнітному коливальному контурі та зміщення від положення рівноваги (x) і швидкості (v) для маятника на пружині. Порівнюючи вирази (у нижній частині таблиці), дійдемо висновку, що роль коефіцієнта пружності відіграє величина, яка обернена ємності C, а роль маси – величина індуктивності L.

Висновки. У статті проведено системний аналіз методів, що використовуються у процесі навчання фізиці і математиці і є розвитком прнципу аналогій [7]. Авторами пропонується таблиця, що є доповненням і поглибленням принципу аналогій у конкретному випадку. Результати статті можуть бути використані під час проведення навчальних занять викладачами, студентами, учнями.

КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ

МЕХАНІКА		ЕЛЕКТРОДИНАМІКА	
Зсув Швидкість	$X = X_m \sin(\omega t + \varphi)$ $\dot{X} = X_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$	Заряд Струм	$q = q_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ $\dot{q} = q_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$
Кінетична енергія Потенціальна енергія	$E_k = \frac{mv^2}{2} = = \frac{m}{2} X_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$ $E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} X_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$	Енергія магнітного поля Енергія електричного поля	$E_{мп} = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2} q^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$ $Eеп = \frac{q^2}{2c} = \frac{q_m^2}{2c} \sin^2(\omega t + \varphi_0)$
Повна енергія механічної системи	$E_{tot} = E_k + E_п = \frac{m}{2} X_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{2} X_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) =$ $= \frac{m}{2} X_m^2 \frac{k}{m} \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{2} X_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$ $= = \frac{kx_m^2}{2} \neq f(t)$	Повна енергія коливального контуру	$E_{tot} = E_{мп} + E_{еп} = \frac{Lq_m^2}{2c} \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) +$ $+ \frac{q_m^2}{2c} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{q_m^2}{2c} \neq f(t)$
Частота	$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$	Частота	$\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{Lc}}$
ФОРМАЛЬНІ АНАЛОГІЇ			
Зсув	$x \to q$	*Електричний заряд*	
Швидкість *Кінетична енергія*	$v \to I$ $E_k \to E_{мп}$	*Електричний струм* ***Енергія магнітного поля***	
Потенціальна енергія *Жорсткість пружини*	$E_п \to Eеп$ $k \to 1/C$	***Енергія електричного поля*** *Ємність конденсатора*	

ЛІТЕРАТУРА

1. Чернилевский Д. В. Технология обучения в высшей школе : [учеб. пособ.] / Чернилевский Д. В., Филатов О. К. ; [под ред. Д. В. Чернилевского]. – М. : Экспедитор, 1996. – 288 с.
2. Ковальчук В. В. Основи наукових досліджень : [навчальний посібник]. – К. : ВД «Слово», 2009. – 249 с.
3. Ковальчук В. В. Математична симетрія форм запису деяких закономірностей / В. В. Ковальчук, В. О. Моісеєва, Л. М. Моїсеєв // Наука і освіта. – 2010. – № 1. – С. 133–137.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и приложения / В. Феллер. – М. : Мир,1984. – 453 с.
5. Физический энциклопедический словарь / [под ред. А. М. Прохорова]. – М. : Сов. энциклопедия, 1983 – 928 с.
6. Вавилов С. И. Исаак Ньютон / С. И. Вавилов. – М. : Наука, 1989. – С. 22–25.
7. Редько Г. Б. Аналогії у курсі фізики середньої школи : [посібник для вчителів] / Г. Б. Редько. – К. : Радянська школа. – 1980. – 55 с.

Рецензенти: Дроздов В. О., д.ф.-м.н., професор;
Клименюк Н. В., к.пед.н., доцент.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.2011 р.