УДК 004.415.2:004.942

Данилов В. Я., Зінченко А. Ю., Жиров О. Л.

ВИЯВЛЕННЯ ХАОСУ В РЕАЛІЗАЦІЯХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ПСЕВДОФАЗОВА РЕКОНСТРУКЦІЯ ЇХ АТРАКТОРІВ

Ця робота присвячена дослідженню скалярних послідовностей від динамічних нелінійних систем, заданих звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, на предмет виявлення детермінованого хаосу та порядку в останніх і реконструкції атракторів в просторі із затримками. Результати дослідження приведені для фінансової нелінійної системи Чена з квадратичною нелінійністю. Для реконструкції математичних моделей та їх атракторів за скалярними реалізаціями авторами була розроблена інформаційна технологія, інтегрована в єдину автоматизовану систему дослідження складних нелінійних систем та часових послідовностей.

Ключові слова: *атрактор, нелінійна система Чена, динамічна система, інформаційна технологія.*

Эта работа посвящена исследованию скалярных последовательностей от динамических нелинейных систем, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, на предмет выявления детерминированного хаоса и порядка в последних и реконструкции аттракторов в пространстве с задержками. Результаты исследования приведены для финансовой нелинейной системы Чена с квадратичной нелинейностью. Для реконструкции математических моделей и их аттракторов по скалярными реализациями авторами была разработана информационная технология, интегрированная в единую автоматизированную систему исследования сложных нелинейных систем и временных последовательностей.

Ключевые слова: *аттрактор, нелинейная система Чена, динамическая система, информационная технология.*

This work is devoted to the study of scalar sequences of nonlinear dynamical systems given by ordinary differential equations of the first order to detect deterministic chaos and order in latest and attractors' reconstruction in the space of delays. The results are presented for the nonlinear financial system introduced by Chen with quadratic nonlinearity. For the reconstruction of mathematical models and their attractors for scalar implementations of the authors has developed information technology, integrated into a single automated system for the study of complex nonlinear systems and time series.

Key words: *attractor, nonlinear system Chen, dynamic systems, information technology.*

Вступ. Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах – одна з фундаментальних проблем сучасного природознавства, яка є предметом детальної уваги дослідників [1]. Неможливість передбачення динаміки в таких системах і часових послідовностях (а також і створення математичних моделей для останніх) пояснюється експоненціальною чутливістю до малих збурень, які роблять неможливим передбачення стану системи (часової послідовності) на інтервалах часу, що перевищують деякий часовий масштаб, логарифмічно залежний від неточності задання початкових умов. Результатом такої поведінки системи, а отже і її часових послідовностей, є те, що вона, як здається на перший погляд, характеризується нерегулярною хаотичною динамікою своїх змінних у часі, але при цьому сама динаміка хаотичного режиму системи є повністю детермінованою і в ній можна встановити ряд закономірностей і властивостей, які відрізняють її від випадкових класичних процесів.

Завдання моделювання гранично ускладнюється, якщо інформація про об'єкт дослідження обмежена одновимірною реалізацією однієї із координат стану системи або наявністю лише спостережуваних скалярних часових послідовностей на атракторі (неповних вимірів). Хоча для цього випадку для побудови математичних моделей у [1] і був запропонований алгоритм глобальної реконструкції, що реалізується в декілька етапів, проте, як для цього алгоритму, так і для інших (наприклад, метод послідовного диференціювання) для повного опису поведінки складних систем та реальних процесів третій етап істотно залежить від похибки апроксимації методами регресійного аналізу (наприклад, рекурентний МНК), точності обчислення похідних, наявності шуму в даних, що обмежують застосування алгоритмів для просторів вкладень великої розмірності. Крім того, запропоновані підходи та побудовані на їх основі сучасні математичні пакети не можуть повністю забезпечити розв'язання задачі дослідження вже на етапі реконструкції виявлених замкнених траєкторій, оскільки складність дослідження хаотичної динаміки обумовлюється експоненціальною чутливістю до малих збурень, а початкові дані істотно залежать від виявлення перехідного режиму і аналізу хаотичної динаміки. Тому класифікація хаосу та порядку в таких реалізаціях та псевдофазова реконструкція їх атракторів є актуальними завданнями.

Постановка проблеми

1. Запропонувати структурно-функціональну схему реконструкції динамічних систем та часових рядів (скалярних реалізацій від динамічних систем) інформаційної технології, на основі якої будуть проведені дослідження.

2. Провести ідентифікацію порядку і хаосу в заданих одновимірних реалізаціях.

3. Реконструювати виявлені атрактори в заданих одновимірних реалізаціях.

Результати дослідження

1. Методи реалізованої інформаційної технології для виявлення хаосу в часових послідовностях та реконструкції їх атракторів.

Загальна методика дослідження динамічного (детермінованого) хаосу, що представлена в запропонованій авторами інформаційній технології, для скалярних реалізацій від складних нелінійних системах різної природи складається з методів якісної (моделювання) та кількісної характеристики динаміки ряду та представлена в табл. 1.

Таблиця 1

Методи дослідження часових послідовностей скалярних реалізацій

Назва методу	Призначення
Візуалізація ряду, виділення тренду, виявлення перехідного режиму, процесу накопичення даних, сталого процесу хаотичних коливань	Аналіз хаотичної динаміки
Показник Херста	Вказує на персистентний (антиперсистентний) або випадковий ряд
Показник Херста та оцінка кореляційної розмірності від перемішаних даних	Вказує на незалежність ряду (не містить жодної нелінійної структури та породжується випадковим процесом)
Тест залишків Брока	Вказує на детермінований хаос
Автокореляційна функція	Вказує на періодичність (квазіперіодичність) та хаотичну поведінку
Тест Гілмора	Визначення нестійких періодичних орбіт, уміщених в атракторі; лабільність областей перемежовування, «вікна періодичності», частотний спектр циклів та варіації типів джокерів.
Ентропія Колмогорова	Визначає детермінований хаос, випадковість системи та регулярний рух
Метод Вольфа	Визначення старшого показника Ляпунова – ідентифікація хаосу
Метод взаємної інформації	Визначення часової затримки
Метод кореляційної розмірності	Знаходження розмірності простору вкладень
Алгоритм Грассберга-Прокачія	Знаходження кореляційної розмірності скалярних реалізацій
Метод часової затримки	Реконструкція оператора еволюції породжуючої системи

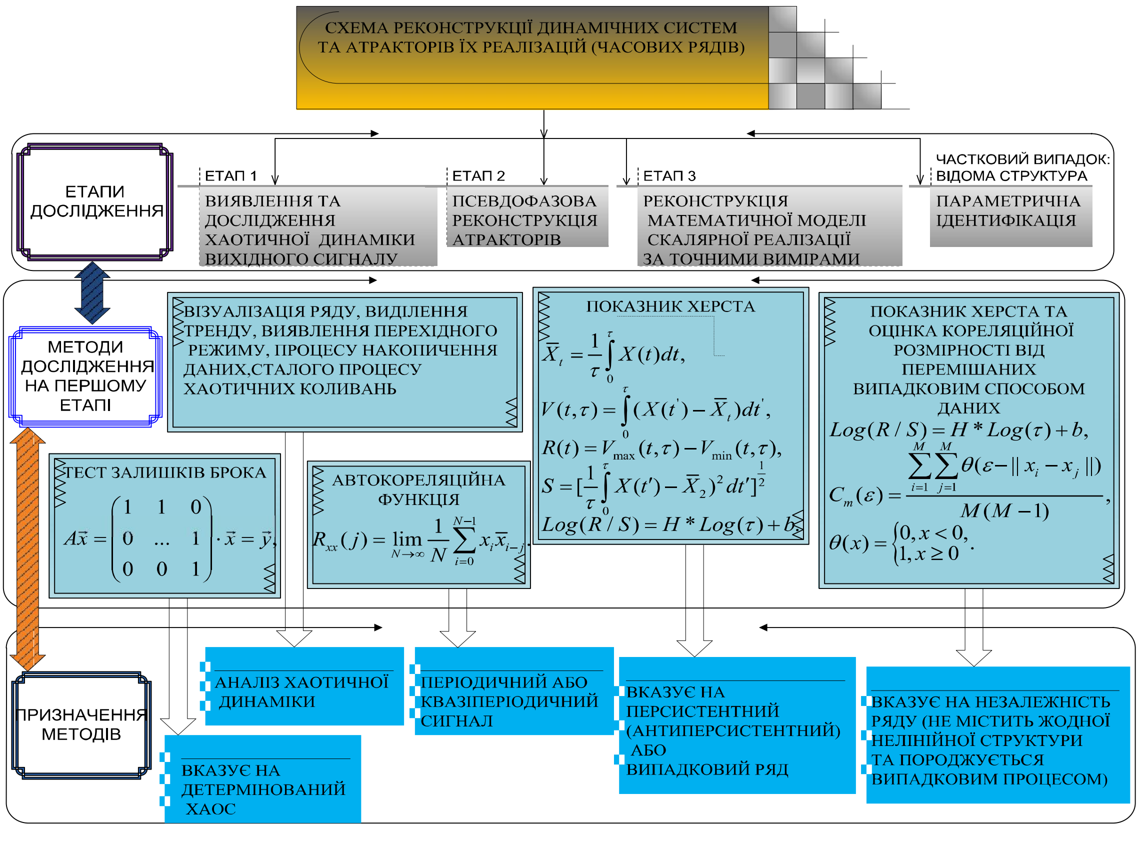
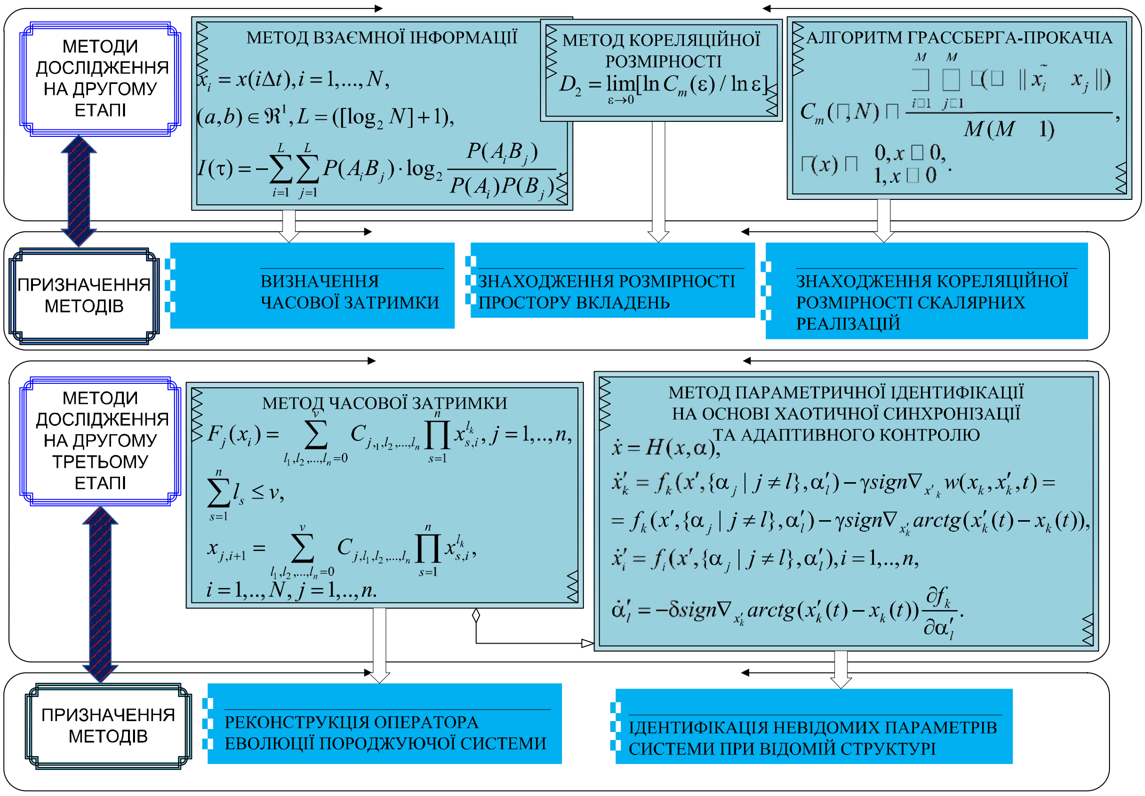


Рис. 1. Структурно-функціональна схема реконструкції динамічних систем та часових рядів (скалярних реалізацій від динамічних систем) інформаційної технології

Продовження рис. 1.



На рис. 1 представлена структурно-функціональна схема реконструкції динамічних систем та часових рядів, що реалізується в 3 етапи: на першому етапі виконується візуалізація ряду, виділення тренду, виявлення перехідного режиму, процесу накопичення даних, сталого процесу хаотичних коливань, ідентифікація та аналіз хаотичної динаміки; на другому – визначається розмірність простору вкладень, часова затримка та реконструюються замкнені траєкторії за скалярним часовим рядом $x_i = x(i\Delta t), i = 1,...,N$; на третьому – здійснюється апріорне задання системи звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку заданої структури і визначення оператора еволюції, наприклад, методом найменших квадратів (МНК). У цій роботі розглядаються перші два етапи.

2. Виявлення порядку і хаосу

Результати дослідження були проведені для скалярної реалізації нелінійної фінансової системи Ю.-Ш. Чена [2] за першою координатою для даної системи, отриманої числовим розв'язком системи з використанням алгоритму Дорманда-Принса [1]. Зазначимо, що для очищення отриманого ряду від перехідного процесу з отриманої послідовності відкидалося 10 % даних. Це дозволяє траєкторії динамічної системи вийти на атрактор та правильно провести його реконструкцію.

Математична модель даної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z + (y-a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz, \end{aligned} \qquad (1)$$

де параметри $a \geq 0$– збереження суми процентної ставки, $b \geq 0$ – вартість інвестицій, $c \geq 0$ – еластичність попиту на комерційних ринках. Перше рівняння цієї системи описує зміну в часі процентної ставки, друге – інвестиційного попиту, а третє – індексу цін. Із докладним описом моделі можна ознайомитися в [2].

Неведомо тут результати досліджень для двох послідовностей, в одній із котрих виявлено хаотичних режим, а в іншій – періодичний (відсутність детермінованого хаосу). Вибірки ряду для хаотичних режимів були вибрані відповідно 100 000 та 50 000 даних. В роботі авторів [3] було запропоновано метод оцінювання вікна реконструкції для підвищення якості обчислення кореляційної розмірності та кореляційного інтеграла $C_m(\varepsilon)$ для рядів довільної розмірності, тому наведемо тут лише результати обчислень кореляційного інтеграла.

Для уникнення помилок при дослідженні детермінованого хаосу, зокрема при обчисленні розмірності вкладення, кореляційної розмірності D_2, тесту Брока, ентропії Колмогорова, BDS-тесту, пов'язаних зі скінченністю ряду, було застосовано критерій А. Цоніса, що визначає мінімально необхідну довжину ряду: $N > 10^{2+0,4D_2}$. А оскільки оцінка кореляційної розмірності для скалярної реалізації за першою координатою системи (1) склала 2.21 (див. рис. 6), то мінімально необхідна довжина ряду повинна перевищувати $10^{2+0,4\cdot 2,21} = 766$ значень, що цілком задовольняє проведені експерименти.

На наступних рисунках наведені результати дослідження (якісні характеристики) виявлення хаотичної складової в отриманих часових послідовностях. Результати всіх досліджень приведені в таблицях 1 та 2.

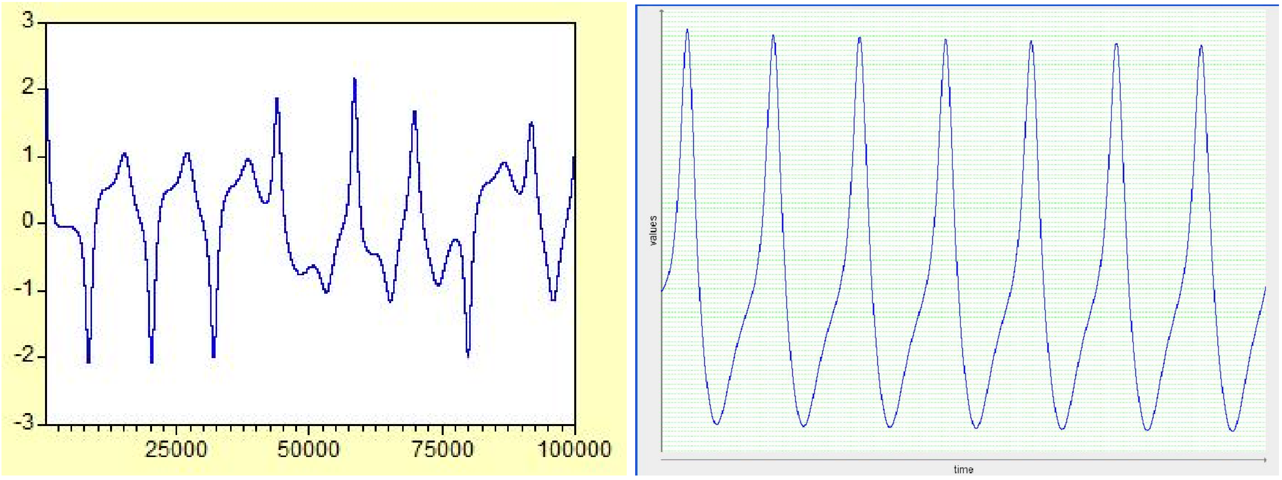


Рис. 2. Динаміка скалярних реалізацій системи (1)

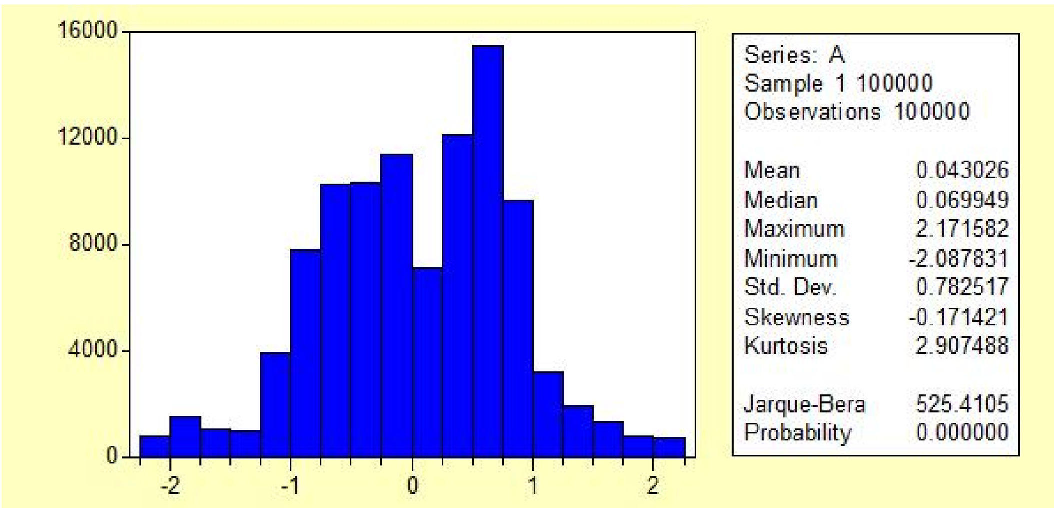


Рис. 3. Статистичні дані першої скалярної реалізації системи (1)

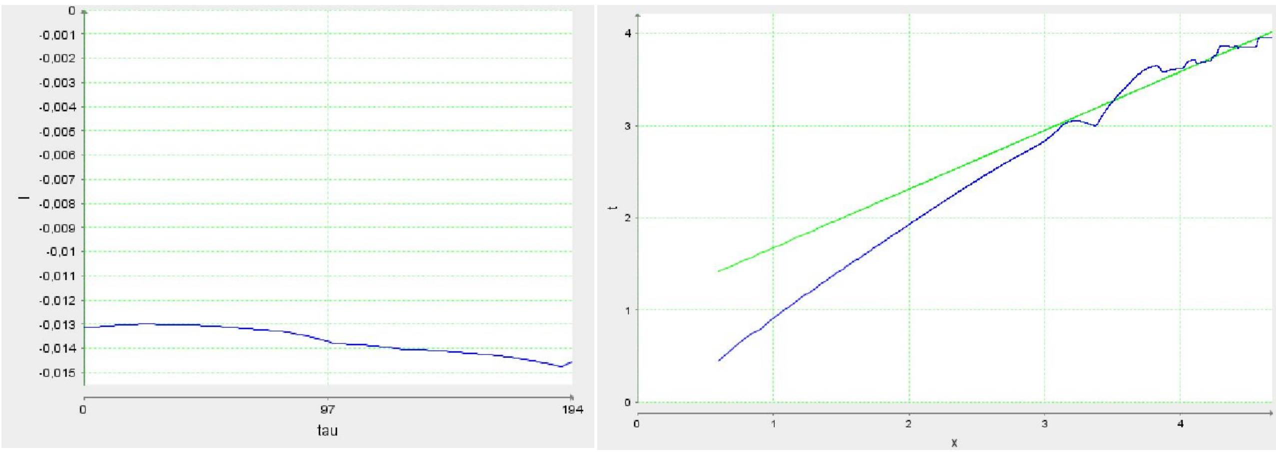


Рис. 4. Графік функції взаємної кореляції (для знаходження часової затримки) та лінійна регресія оцінки показника Херста (праворуч)

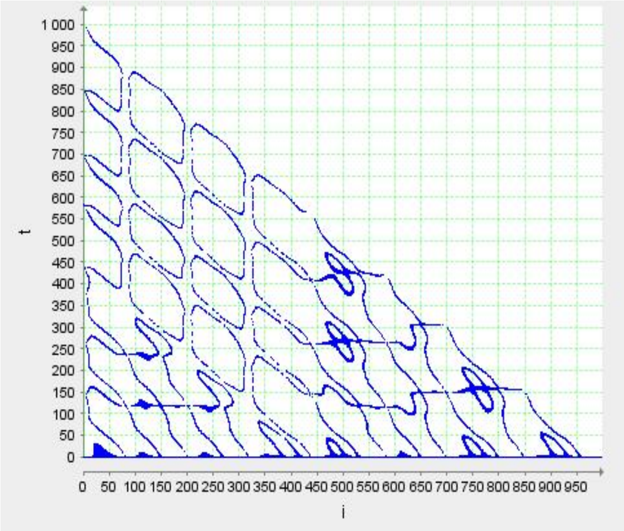


Рис. 5. Тест Гілмора: точковий джокер

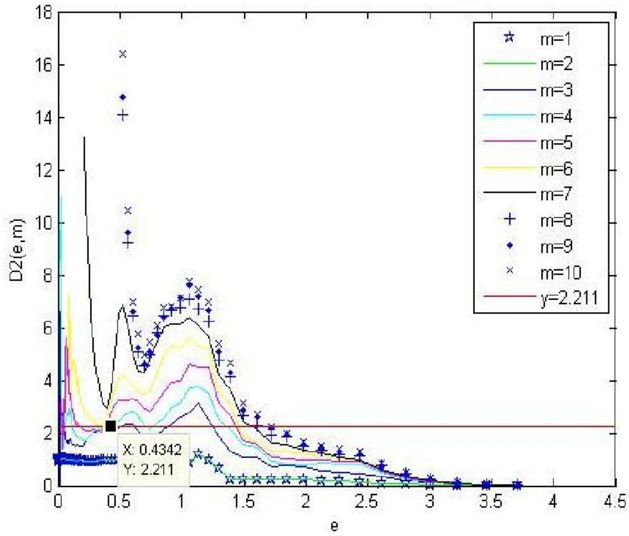


Рис. 6. Оцінка розмірності вкладення. Кореляційна розмірність оцінена 2.211, при цьому використано 2×10^5 точок.

Таблиця 2

Кількісні і якісні характеристики ідентифікація хаосу та реконструкції його математичної моделі для першої скалярної реалізації.

Назва характеристики	**Її опис (кількісне значення)**	**Назва характеристики**	**Її опис (кількісне значення)**
Показник Херста	0,6373674565179218	Автокореляція	прямує до нуля
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0,49575916212187643	Старший показник Ляпунова	0,24
Тест Брока	2,211 і 2.213	Розмірність Мінковського	1,363
Ентропія Колмогорова	0,12528	Візуалізація ряду	хаотичний режим
Кореляційна розмірність	2,211	Розмірність вкладення	3
Тест Гілмора та ε	Точковий джокер, $\varepsilon = 0{,}0425099$	Часова затримка	109 секунд

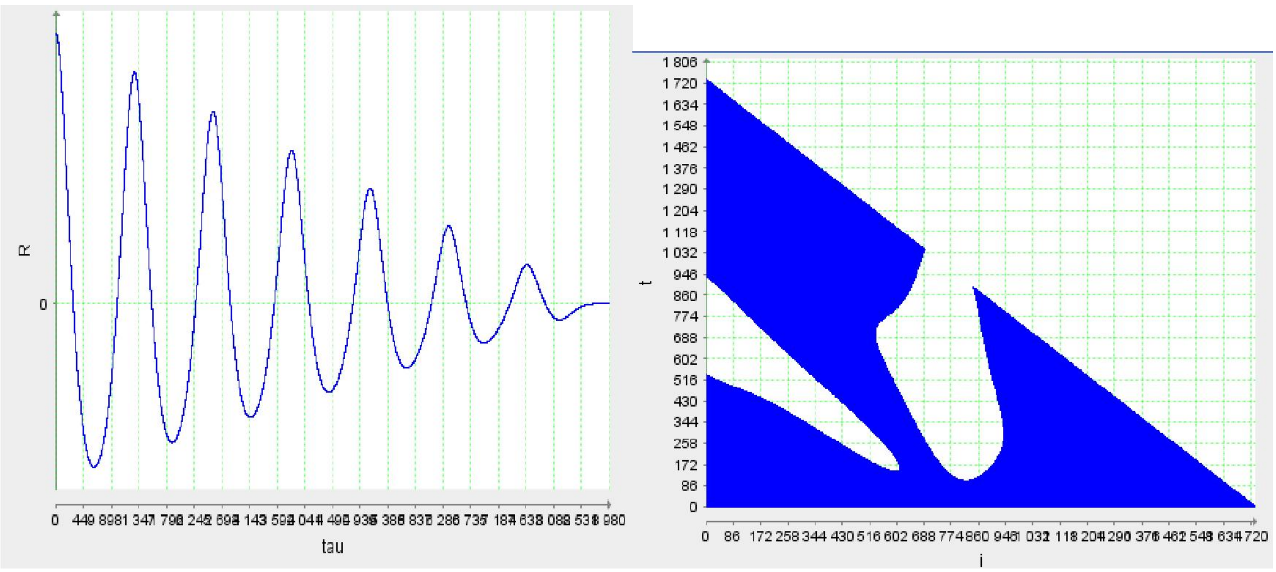


Рис. 7. Автокореляційна функція та тест Гілмора: інтервальний джокер (справа)

Таблиця 3

Кількісні і якісні характеристики ідентифікація хаосу та реконструкції його математичної моделі для другої скалярної реалізації

Назва характеристики	Її опис (кількісне значення)	Назва характеристики	Її опис (кількісне значення)
Показник Херста	0.5329451297009791	Автокореляція	Квазіперіодична
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0.4931770541926732	Старший показник Ляпунова	0,01
Тест Брока	2.211 і 2.467	Розмірність Мінковського	1,46
Ентропія Колмогорова	0,01	Візуалізація ряду	регулярний режим
Кореляційна розмірність	2.211	Розмірність вкладення	3
Тест Гілмора та ε	Інтервальний джокер , ε = 0,07	Часова затримка	28 секунд

3. Реконструкція виявлених атракторів

У попередніх дослідженнях, наведених в табл. 1 і 2, обчислені кореляційні розмірності та розмірності вкладення для даних часових послідовностей. На основі цих даних проведемо реконструкцію виявлених атракторів за теоремою Такенса [1] про вкладення.

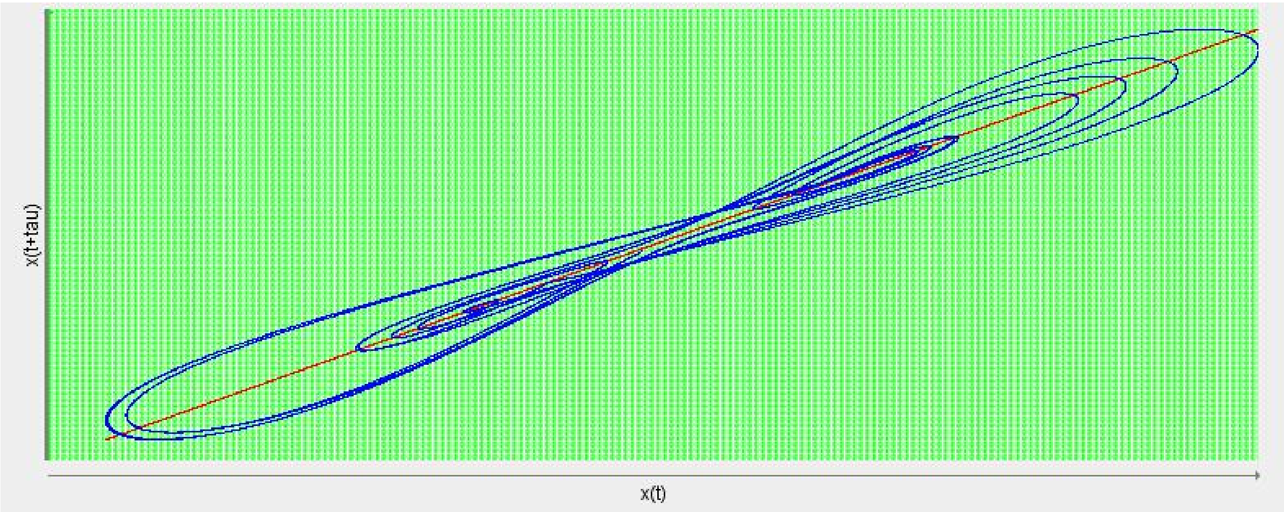


Рис. 8. Псевдофазова реконструкція першої реалізації системи (1). Часова затримка 109 секунд, розмірність вкладення – 3

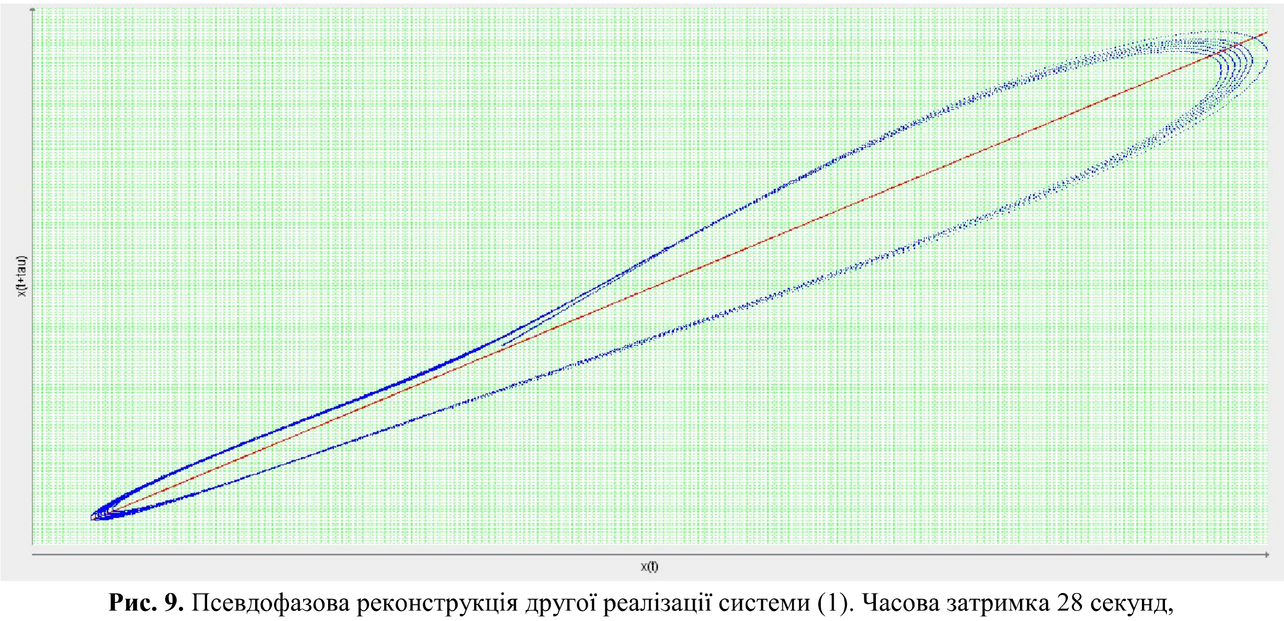


Рис. 9. Псевдофазова реконструкція другої реалізації системи (1). Часова затримка 28 секунд, розмірність вкладення – 3

Висновки. На основі розробленої авторами автоматизованої системи дослідження детермінованого хаосу в часових послідовностях від динамічних систем, яка об'єднує 12 відомих та 2 запропонованих методів дослідження, було успішно виявлено хаотичний та регулярний режим у скалярних реалізаціях нелінійної фінансової системи Чена [2]. Виявлені атрактори були реконструйовані. Для виявленого граничного циклу можна застосовувати алгоритм глобальної реконструкції математичної моделі, а для реконструйованого дивного атрактору така задача потребує уточнення (коректного вибору виду еволюційних операторів, збільшення точності обчислення похідних), обумовленого експоненціальною чутливістю до малих збурень.

Література

1. Данилов В. Я. Синергетичні методи аналізу / В. Я. Данилов, А. Ю. Зінченко. – К. : НТУУ «КПИ» ВПИ ВПК «Політехніка», 2011. – 340 с.
2. Ma J. H. and Chen Y. S. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I // Applied Mathematics and Mechanics. – 2001. – Vol. 22, No. 11. – Pp. 1240–1251.
3. Данилов В. Я. Розробка інформаційної технології ідентифікації динамічного хаосу та псевдофазової реконструкції атракторів одновимірних реалізацій / В. Я. Данилов, А. Ю. Зінченко, П. П. Марчук // Наукові вісті НТУУ «КПІ». Серія: технічні науки. – 2011. – № 2 (76). – С. 59–68.
4. Данилов В. Я. До реалізації інструментарію дослідження хаотичної та регулярної поведінки динамічних систем і реконструкції оператора еволюції динамічних систем / В. Я. Данилов, А. Ю. Зінченко // Наукові праці : науково-методичний журнал. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили. – 2010. – Вип. 130. Том 143. Комп'ютерні технології. – С. 18–26.

Рецензенти: Кондратенко Ю. П., д.т.н., професор;
Гожий О. П., к.т.н., доцент.

Дата надходження статті до редколегії 10.05.2013 р.

ДАНИЛОВ Валерій Якович, д.т.н, професор, Інститут прикладного системного аналізу (ІПСА) при Національному технічному університеті України «КПІ».

ЗІНЧЕНКО Артем Юрійович, магістр Інституту прикладного системного аналізу (ІПСА) при Національному технічному університеті України «КПІ».

ЖИРОВ Олександр Леонідович, к.т.н., доцент НТУ КПІ. Сфера наукових інтересів: математичне моделювання та аналыз складних систем.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ