

ПРО «М'ЯКЕ» МОДЕЛЮВАННЯ БІКВАДРАТИЧНОГО ССЕ

«М'яке» моделювання серендипових елементів здійснюється шляхом варіювання початкових аплікват серендипових поверхонь.

Ключові слова: *серендипові скінченні елементи, спосіб варіювання початкових аплікват, альтернативні базиси біквадратичної інтерполяції.*

«Мягкое» моделирование серендиповых элементов осуществляется путем варьирования начальных аппликат серендиповых поверхностей.

Ключевые слова: *серендиповы конечные элементы, способ варьирования начальных аппликат, альтернативные базисы биквадратичной интерполяции.*

The «Soft» modeling serendipity elements is done by varying the initial z-coordinate serendipity surfaces.

Key words: *serendipity finite elements, the method of varying the initial z-coordinate, alternative bases biquadratic interpolation.*

Постановка проблеми. Ця стаття узагальнює і доповнює роботу [1], яка стосується процедури конденсації в задачах конструювання нових базисів серендипових скінченних елементів (ССЕ). Сьогодні в теорії серендипових апроксимацій з'явилися нові підходи і нестандартні моделі елементів, тому увага дослідників поступово переключається на математично обґрунтовані і фізично адекватні моделі. Як відомо, фізична неадекватність – головний недолік стандартних ССЕ. Мається на увазі протиприродний розподіл вузлових навантажень («парадокс Зенкевича»). Ми розглядаємо поліноміальну функцію форми ССЕ як лінійну комбінацію поліномів Лагранжа. Вузлові навантаження можна варіювати за допомогою коефіцієнтів лінійної комбінації. Це приклад «м'якого» (за термінологією В. І. Арнольда) математичного моделювання. На жаль, цей простий і природний підхід до конструювання альтернативних базисів ССЕ поки що лишається поза увагою користувачів, що виявляють інтерес до серендипових апроксимацій.

Аналіз попередніх публікацій, мета роботи. Перші моделі ССЕ (їх називають стандартними) були отримані в 1968 р. підбором [2]. Із тих часів зберігається необґрунтована думка, що ССЕ погано піддаються будь-якій формалізації. Сьогодні ми знаємо вже декілька різних методів моделювання ССЕ: метод оберненої матриці, нематричний метод Тейлора, модифікація геометричного метода Уачспреса, метод імовірісно-геометричного моделювання. Окремо варто нагадати про комбінований алгебро-геометричний метод [3], що втілює кращі риси перелічених підходів.

Можна сперечатися щодо цілей, які ставили перед собою Ергатудіс, Айронс і Зенкевич, відкриваючи

ССЕ. Незаперечним є той факт, що прообразом елемента серендипової сім'ї був елемент Лагранжа. Перетворення лагранжева елемента у серендипів Стренг і Фікс [4] називають модифікацією. В інших джерелах застосовують термін «конденсація» (редукція). Під цим розуміють зниження вимірності системи рівнянь за допомогою вилучення деяких ступенів волі (позавузлових параметрів). Нижче ми покажемо, як за допомогою позавузлових параметрів (внутрішніх мод) побудувати базис СЕ серендипової сім'ї із базисних функцій відповідного СЕ лагранжевої сім'ї. Це перетворення зведено до обчислення коефіцієнтів лінійної комбінації поліноміальних функцій базиса Лагранжа. Ефективність цієї процедури підтверджується конкретними прикладами [1,5]. Тут ми наведемо досить детальну таблицю коефіцієнтів редукції, які «пом'якшують» стандартну модель ССЕ. Про «жорсткі» і «м'які» математичні моделі можна прочитати у брошурі [6].

Мета роботи – скласти таблицю коефіцієнтів редукції, щоб формалізувати процедуру побудови ССЕ. При цьому буде показано, як єдиний лагранжев СЕ генерує множину ССЕ.

Основна частина. На рис. 1. зображено СЕ біквадратичної інтерполяції: лагранжева модель – 9 вузлів, серендипова – 8. Вузли лагранжевої моделі розташовані у вершинах ортогональної сітки, що поділяє СЕ на 4 одиничних квадрата. Ця обставина суттєво спрощує побудову базисних функцій вищих порядків. Процедура полягає в простому перемноженні одновимірних базисних функцій від x та y . Щоб отримати повний базис Лагранжа, достатньо побудувати лише три функції: $L_1(x, y)$, $L_5(x, y)$ та $L_9(x, y)$.

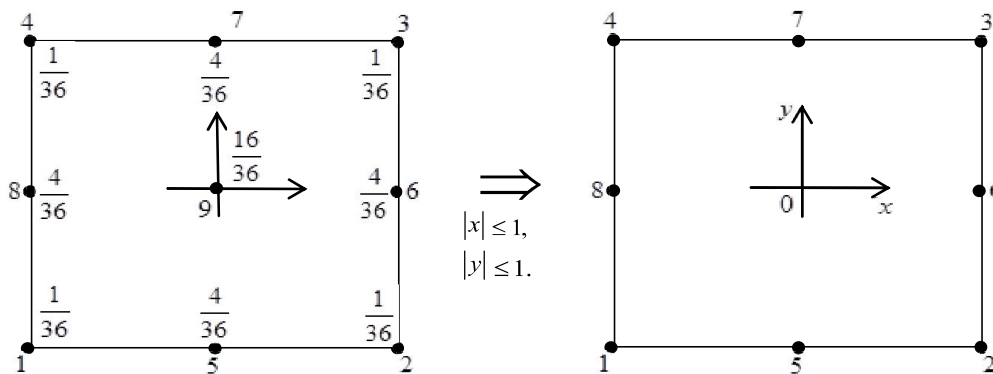


Рис. 1. Дві моделі СЕ біквадратичної інтерполяції

Ці функції мають вигляд:

$$L_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)xy,$$

$$L_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(y-1)y,$$

$$L_9(x, y) = (1-x^2)(1-y^2) \quad (1)$$

Неважко переконатися, що базисні функції лагранжевих СЕ забезпечують неперервність глобальних базисних функцій на міжелементних межах. На кожній стороні СЕ ми маємо достатню кількість параметрів для однозначного визначення полінома. Це гарантує C^0 – гладкість глобальної апроксимації фізичного поля. Важливо відзначити, що міжелементний обмін інформацією відбувається винятково через граничні вузли. Тому внутрішні вузли лагранжевих СЕ можна виключити. Саме так була несподівано відкрита сім'я серендипових СЕ.

Поведінка серендипова полінома на границі СЕ регламентується умовами інтерполяційної гіпотези Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i=k, \\ 0, & \text{якщо } i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) = 1, \quad (2)$$

де $N_i(x, y)$ – базисна функція ССЕ, що асоціюється з вузлом i ; i – номер функції, k – номер вузла. Ці умови зберігають міжелементну неперервність поля. Усередині СЕ серендипова модель відрізняється від лагранжевої. Тут ми маємо приклад «жорсткого» та «м'якого» математичного моделювання. Для «жорсткої» моделі (Ергатудіса, Айронса, Зенкевича) зв'язок між лагранжевими і серендиповими базисами має вигляд:

$$N_1(x, y) = L_1(x, y) - \frac{1}{4}L_9(x, y);$$

$$N_5(x, y) = L_5(x, y) + \frac{1}{2}L_9(x, y), \quad (3)$$

Вузлові навантаження від одиничної масової сили визначаються за формулою інтегрального середнього:

$$P_i = \frac{1}{S_D} \iint \Phi_i(x, y) dx dy, \quad (4)$$

де $\Phi_i(x, y)$ – базисна функція відповідної моделі; D – область інтегрування; S – площа області D . Для елемента лагранжевої сім'ї вузлові навантаження нанесено на СЕ (рис. 1). Як розподілити $P_9 = \frac{16}{36}$ між граничними вузлами СЕ? Зрозуміло, що способів безліч, але не всі вони дають фізично адекватний розподіл навантажень. Позначимо через α і β частки, що передає функція $L_9(x, y)$ відповідно кутовому і проміжному вузлу на границі СЕ. Тоді $4\alpha + 4\beta = 1$. Із геометричної точки зору α – апліката кутової поверхні $N_i(x, y)$, β – апліката проміжної поверхні в точці $(0,0)$ після модифікації СЕ (перезавантаження вузлів). Існує тісний зв'язок між P_i і коефіцієнтами редукції α і β . Формула (3) у загальному випадку набуває вигляду:

$$N_1(x, y) = L_1(x, y) + \alpha L_9(x, y),$$

$$N_5(x, y) = L_5(x, y) + \beta L_9(x, y).$$

Коефіцієнти α і β наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Коефіцієнти редукції для «м'якого» моделювання біквадратичних ССЕ

P_1	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$		$-\frac{3}{36}$
α	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$		$-\frac{4}{16}$
β	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{2}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{4}{16}$		$\frac{8}{16}$
P_5	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0		$\frac{12}{36}$

У прикладах, що наведені нижче, розглядаються конкретні навантаження кутових вузлів P_1 і відповідні базиси ССЕ.

Для $P_1 = -\frac{1}{12}$ (стандартна модель Ергатудіса, Айронса, Зенкевича) базисні функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y); \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y) \end{aligned} \quad (5)$$

Для $P_1 = 0$ (завантажені лише проміжні вузли):

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(3xy - x - y - 1); \\ N_5 &= \frac{1}{16}(1-x^2)(3y^2 - 8y + 5) \end{aligned} \quad (6)$$

Для $P_1 = \frac{1}{12}$ (модель чотирьох стержнів):

$$N_1(x, y) = \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(3xy + x + y + 1);$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-x^2)(3y^2 - 4y + 1) \quad (7)$$

Для $P_1 = \frac{1}{9}$: $N_1(x, y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(7xy + 3x + 3y + 3)$;

$$N_5 = \frac{1}{16}(1-x^2)(7y^2 - 8y + 1) \quad (8)$$

Для $P_1 = \frac{1}{4}$ (завантажені лише кутові вузли):

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(3xy + 2x + 2y + 2); \\ N_5 &= \frac{1}{4}(1-x^2)(3y^2 - 2y - 1) \end{aligned} \quad (9)$$

Висновки. Отримані результати свідчать про єдиність лагранжевої інтерполяції та неєдиність серендипової апроксимації. «М'яке» моделювання біквадратичних базисів ССЕ здійснюється шляхом варіювання початкових аплікат серендипових поверхонь. Цікаво розглянути можливість розповсюдження запропонованого підходу на бікубічні ССЕ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Хомченко А. Н. Серендипові скінченні елементи : фізична адекватність / А. Н. Хомченко // Наукові праці : наук.-метод. журнал. – Вип. 179. Т. 191. Комп'ютерні технології. – Миколаїв : ЧДУ ім. Петра Могили, 2012. – С. 39–41.
2. Ergatoudis I. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Intern. J. Solids Struct., 4, 1968. – P. 31–42.
3. Астионенко И. А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – Вип. 16, № 5 (60). – Белгород : БелГУ, 2009. – С. 15–31.
4. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 350 с.
5. Литвиненко Е. И. Внутренние моды конечных элементов: преобразование лагранжевых моделей в серендиповы / Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. – Вип. 2 (45). – Херсон : ХНТУ, 2012. – С. 205–210.
6. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2008. – 32 с.

Рецензенти: Дихта Л. М., д.т.н., професор;
Кондратенко Ю. П., д.т.н., професор;

© Хомченко А. Н., Рим К. В., 2013

Дата надходження статті до редколегії 10.05.2013 р.

ХОМЧЕНКО **Анатолій Никифорович**, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету ім. Петра Могили, м. Миколаїв, Україна. Сфера наукових інтересів: ймовірно-геометричні моделі теорії наближення функцій, методи барицентричного усереднення граничних потенціалів.