УДК 539.3

Пузырев С. В.

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГОФРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Досліджено вільні коливання ортотропних гофрованих циліндричних оболонок змінної товщини на основі методу сплайн-коллокації.

Ключові слова: *гофрованые циліндричні оболонки, метод сплайн-коллокації.*

Исследованы свободные колебания ортотропных гофрированных цилиндрических оболочек сменой толщины на основе метода сплайн-локации.

Ключевые слова: *гофрированные цилиндрические оболочки, метод сплайн-коллокации.*

There are researched the free vibrations of orthotropic corrugated cylindrical shells on the basis of the spline-collocation method.

Key words*: corrugated cylindrical shells, spline-collocation method*

Введение. Цилиндрические тонкостенные оболочки с некруговым профилем поперечного сечения являются распространенным элементом современных машиностроительных конструкций. Статический и динамический анализ таких конструкций является очень важным этапом проектных работ.

В работах многих авторов анализировались напряжения и резонансные частоты колебаний оболочек с эллиптическим поперечным сечением [1, 2], и влияние на их распределение различных геометрических и механических факторов. Из *анализа отмеченных публикаций* можно сделать вывод, что динамическому анализу гофрированных оболочек уделяется гораздо меньше внимания, чем остальным типам оболочек.

Для решения указанного класса задач наряду с методами Релея-Ритца, МКЭ, конечных полос широко применяются методы сведения двумерных задач динамики оболочек к одномерным задачам на собственные значения. В последнее время в задачах вычислительной математики и механики для этих целей широко применяются системы ортогональных функций, в частности системы сплайн-функций [4]. Сплайн-функции обладают такими свойствами:

– *устойчивостью* относительно локальных возмущений;

– *хорошей сходимостью*;

– *простотой и удобством* организации вычислений на ПК.

В данной работе исследуются свободные колебания незамкнутых по направляющей гофрированных цилиндрических оболочек переменной толщины.

Исходные соотношения и методика решения. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях ортотропной цилиндрической оболочки переменной толщины $h(s,t)$ и произвольного очертания поперечного сечения. В качестве координатных линий выберем длины дуг по образующей и направляющей s и t.

Согласно классической теории Кирхгофа-Лява [3] уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрических оболочек будут иметь вид:

$$C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial C_{66}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}+C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial C_{11}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s}+(C_{66}+C_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial s}+\frac{\partial C_{12}}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial C_{66}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s}+$$
$$+k_t C_{12}\frac{\partial w}{\partial s}+k_t\frac{\partial C_{12}}{\partial s}w=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

$$C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial C_{22}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+\frac{\partial C_{66}}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}+(C_{66}+C_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}+\frac{\partial C_{66}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial C_{12}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}-$$
$$-k_t D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}-k_t\frac{\partial D_{22}}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-k_t(D_{12}+4D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial s^2}-4k_t\frac{\partial D_{66}}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial s}+k_t C_{22}\frac{\partial w}{\partial t}-$$
$$-k_t\frac{\partial D_{12}}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\left(k_t\frac{\partial C_{22}}{\partial t}+k_t' C_{22}\right)w=\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2},$$

(1)

$$D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+2\frac{\partial D_{22}}{\partial t}\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial s^2}+2\frac{\partial(D_{12}+2D_{66})}{\partial s}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial s}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\frac{\partial(D_{12}+2D_{66})}{\partial t}\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial s^2}+4\frac{\partial^2 D_{66}}{\partial t\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial s}+D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+$$
$$+2\frac{\partial D_{11}}{\partial s}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+k_t^2 C_{22}w+k_t C_{22}\frac{\partial v}{\partial t}+k_t C_{12}\frac{\partial u}{\partial s}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}=0.$$

где $u(s,t,\tau)$, $v(s,t,\tau)$ и $w(s,t,\tau)$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки; C_{ij} и D_{ij} – жесткости оболочки на растяжение-сжатие и изгиб.

На контурах $s=const$ задаются граничные условия, которые определяются через перемещения [3]:

1) жестко закрепленный контур (***C***) –

$$u=v=w=0,\ \frac{\partial w}{\partial s}=0; \qquad (2)$$

2) шарнирно закрепленный контур (***Sc***) –

$$u=v=w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0; \qquad (3)$$

3) шарнирно опертый контур (***S***) –

$$\frac{\partial u}{\partial s}=0\,,\ v=w=0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0\,; \qquad (4)$$

4) свободный контур (***F***) –

$$N_s=0\,,\qquad M_s=0\,,\qquad S+2k_tH=0\,,\qquad Q_s+\frac{\partial H}{\partial t}=0\,. \qquad (5)$$

Аналогичные условия могут быть заданы и на контурах $t=const$, если в уравнениях (2) – (6) сделать замену $s\to t$, $u\to v$, $v\to u$, $k_t\to 0$. Кроме того, на контурах $t=const$ можно задать условия симметрии (***Sm***):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0\,,\ v=0\,,\ \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}=0\,. \qquad (6)$$

На контурах оболочек могут быть заданы произвольные комбинации граничных условий вида (2) – (6). Например, ***CCCC*** – жестко закрепленная по всем контурам открытая цилиндрическая оболочка; ***CSCS*** – защемленная на прямолинейных торцах и опертая на криволинейных открытая цилиндрическая оболочка.

Пусть направляющая оболочки задана параметрически $x=f_1(\theta)$, $y=f_2(\theta)$, или в полярной системе координат $r=r(\theta)$, где θ – параметр направляющей.

Тогда элемент дуги направляющей $dt=\gamma(\theta)d\theta$, причем

$$\gamma(\theta)=\sqrt{\left(f_1'(\theta)\right)^2+\left(f_2'(\theta)\right)^2} \qquad (7)$$

или

$$\gamma(\theta)=\sqrt{r^2+r'^2}\ . \qquad (8)$$

Переходя затем в уравнениях (1) – (6) от производной по дуге к производной по параметру по формуле $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{\gamma(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}$, искомые перемещения представим в виде:

$$u(s,\theta,\tau)=e^{i\omega_0\tau}\sum_{i=0}^{N}u_i(\theta)\varphi_{1i}(s)\,,$$

$$v(s,\theta,\tau)=e^{i\omega_0\tau}\sum_{i=0}^{N}v_i(\theta)\varphi_{2i}(s)\,, \qquad (9)$$

$$w(s,\theta,\tau)=e^{i\omega_0\tau}\sum_{i=0}^{N}w_i(\theta)\varphi_{3i}(s)$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$ и $w_i(\theta)$ ($i=0..N$) – искомые функции; $\varphi_{1i}(s)$, $\varphi_{2i}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций B-сплайнов третьей степени ($N\ge 4$), $\varphi_{3i}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций B-сплайнов пятой степени ($N\ge 6$), которые точно удовлетворяют граничным условиям при $s=const$ [4].

Подставив (7) в уравнения (1) – (6), будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k\in[0,L]$, $k=0..N$, за которые выбираются корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке [0,1]. После всех преобразований получим систему $N+1$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u_i, v_i и w_i, которую можно записать в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta}=\mathbf{A}(\theta,\omega_0)\bar{Y}\ \ (\theta_1\le\theta\le\theta_2), \qquad (10)$$

где $\bar{Y}^T=\{\bar{u},\bar{u}',\bar{v},\bar{v}',\bar{w},\bar{w}',\bar{w}'',\bar{w}'''\}^T$ – вектор искомых функций, $\mathbf{A}(\theta,\omega_0)$ – квадратная матрица порядка $8(N+1)\times 8(N+1)$.

Граничные условия (2) – (6) для системы (8) можно записать в виде

$$\mathbf{B_1}\bar{Y}(\theta_1)=\bar{0}\,,\ \mathbf{B}_2\bar{Y}(\theta_2)=\bar{0}\,. \qquad (11)$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) с граничными условиями (11) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [3, 4].

Анализ результатов расчета. С помощью вышеописанной методики исследовался спектр собственных колебаний гофрированных цилиндров переменной толщины с круговой базой (рис. 1), т.е. уравнение направляющей в полярной системе координат можно записать в таком виде:

$$r(\varphi)=R_0+a\cos(k\varphi), \qquad (12)$$

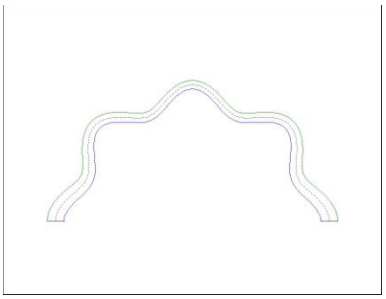
где R_0 – радиус базового цилиндра, a, k – соответственно амплитуда и частота гофрировки. В данной работе были приняты такие значения этих параметров: $R_0=0{,}044$ м, $a=0{,}004$ м, $k=8$. Длина оболочки $L=0{,}12$ м.

Закон изменения толщины был выбран из соображений сохранения массы гофрированных оболочек постоянной и переменной толщины с одинаковыми радиусами и частотами гофрировки:

$$h(\varphi)=h_0\left\{1+\alpha\left[6\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2-6\frac{\varphi}{\pi}+1\right]\right\}, \qquad (13)$$

где $0\le\varphi\le\pi$; $h_0=0{,}004$ м – толщина эквивалентной по массе оболочки неизменной толщины.

$\alpha=-0{,}5$



$\alpha=0{,}5$

Рис. 1. Спектр собственных колебаний гофрированных цилиндров переменной толщины с круговой базой.

Механические характеристики материала оболочек были выбраны одинаковыми: $E_1 = 47{,}6$ МПа, $E_2 = 20{,}7$ МПа, $G_{12} = 5{,}31$ МПа, $\nu_1 = 0{,}149$, $\nu_2 = 0{,}065$, $\rho = 1880$ кг/м^3.

В таблице 1 представлены безразмерные частоты жестко защемленных по контуру (***CCCC***) гофрированных цилиндров при $|\alpha| \le 0{,}5$.

Таблица 1

$\overline{\omega}_i = \omega_i L\sqrt{\rho(1-\nu_1\nu_2)/E_1}$						
i	$\alpha = -0.5$	$\alpha = -0.4$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = -0.2$	$\alpha = -0.1$	$\alpha = 0$
1	3,92206	3,89332	3,86049	3,81970	3,76804	3,70212
2	4,04866	4,00992	3,96842	3,92175	3,86795	3,80449
3	4,37909	4,36610	4,34898	4,32588	4,29768	4,25629
4	4,53958	4,50037	4,45466	4,39961	4,33409	4,26580
i	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$	
1	3,61664	3,50362	3,32716	2,98711	2,62020	
2	3,72618	3,60375	3,35418	3,16341	2,93325	
3	4,01038	3,71453	3,55667	3,42049	3,26463	
4	4,16423	4,05661	3,93329	3,79508	3,64316	

На рис. 2 представлены графики зависимости первых частот свободных колебаний гофрированных цилиндров в зависимости от параметра сечения α.

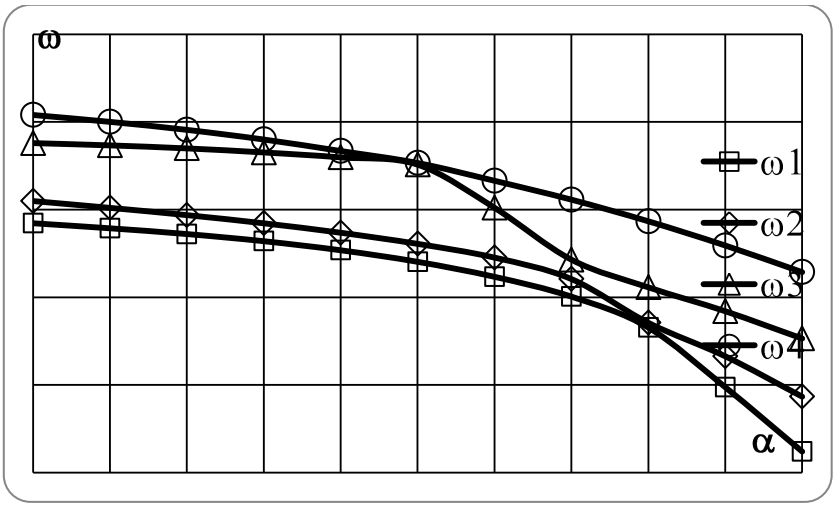


Рис. 2. Графики зависимости первых частот свободных колебаний гофрированных цилиндров в зависимости от параметра сечения α.

Выводы. Из рассмотрения рис. 2 следует, что с увеличением параметра сечения α резонансные частоты гофрированных цилиндров медленно, почти линейно убывают от отрицательных значений до нуля; далее частоты убывают очень быстро. Т.е., при сохранении веса оболочки утолщение ее торцов ведет к резкому уменьшению значений низших резонансных частот. При утолщении же центральной области оболочки ее частоты плавно увеличиваются.

Таким образом, подбирая параметры сечения оболочки, можно в достаточно широких пределах управлять ее частотами свободных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariychenko L.I.* Calculation of Stress-Strain State of Orthotropic Closed and Open Non-Circular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 778.
2. А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев, Е.А. Волчек Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
3. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т. 4).
4. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики – К.: Либідь, 1995.– с. 260–272.

© Пузырев С.В., 2012

Дата надходження статті до редколегії 10.05.2012 р.

ПУЗИРЄВ С. В. – к.ф.-м.наук, доцент, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського.
Коло наукових інтересів: математичне моделювання в задачах технічної механіки.