УДК 004.81:004.383.8

Кондратенко Г. В., Кондратенко Ю. П., Сіденко Є. В., Чабан В. Й.

ІНВЕРСНИЙ ПІДХІД ДО КОМП'ЮТЕРНОГО СИНТЕЗУ АПРІОРНИХ МОДЕЛЕЙ ПОЧАТКОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ КЛАСУ TSP ТА CVRP

В статті наведена постановка задачі та синтезовані апріорні моделі початкової інформації для реалізації інверсного підходу при розв'язанні задач класу TSP та CVRP.
Ключові слова: *координати вузлів, маршрут, оптимізація, транспортна мережа.*

В статье приведена постановка задачи и синтезированные априорные модели исходной информации для реализации инверсного подхода при решении задач класса TSP и CVRP.
Ключевые слова: *координаты узлов, маршрут, оптимизация, транспортная сеть.*

The article contains statement of the problem and synthesized a priori models of initial information for the implementation of the inverse approach in solving problems of class TSP and CVRP.
Key words*: coordinate nodes, route, optimisation, transport network.*

Вступ

Задачі класу TSP (Traveling Salesman Problem) та CVRP (Capacitative Vehicle Routing Problem) відіграють суттєву роль при оптимізації траєкторій і маршрутів різнотипних транспортних засобів, зокрема, автомобілів, суден, літаків тощо [4,7,13]. Зменшення загальної довжини маршрутів призводить до економії часових та енергетичних ресурсів при їх реалізації [2,11,12]. При оптимізації маршрутів в межах транспортних мереж з незначною кількістю вузлів (міст, портів, місць дислокації) доцільно використовувати точні математичні методи, що базуються на лінійному програмуванні [6,7,8,14]. Для оптимізації маршрутів в транспортних мережах з великою кількістю вузлів більш доцільно застосовувати евристичні методи, наприклад, метод штрафних функцій, моделювання випалювання, генетичний алгоритм (tabu search, anelling modelling, genetic algorithm) тощо [7,9,10,14]. Як правило, апріорно відомою при розв'язанні задач класу TSP та CVRP [1,3,5,6,7,11] є початкова інформація про координати вузлів, що входять до складу транспортної мережі, на координатному полі якої необхідно здійснювати планування та оптимізацію маршрутів. На основі апріорних даних щодо координат вузлів за відповідними математичними моделями розраховують відстані між всіма вузлами. В багатьох випадках апріорно відомою є безпосередньо матриця відстаней між вузлами транспортної мережі. На даний час в різних країнах розроблено ряд інформаційних технологій, що дозволяють розв'язувати задачі класу TSP та CVRP на основі стандартних пакетів прикладних програм, які реалізують той чи інший метод евристичної оптимізації [5,6,7,11]. Для більшості програмних розробок такого класу апріорною інформацією є дані стосовно координат вузлів транспортної мережі. Перед користувачами таких програмних розробок стають серйозні перешкоди у випадках наявності апріорної інформації у вигляді матриці відстаней між вузлами, яка не може бути безпосередньо використана і вимагає попередньої обробки на основі інверсного підходу.

Метою даної статті є розробка інверсного підходу до формування моделей координат вузлів транспортних мереж на основі відомої апріорної інформації у вигляді матриці відстаней між відповідними вузлами.

Узагальнена постановка задачі

Інверсну задачу формування апріорних моделей початкової інформації стосовно координат вузлів на основі апріорно відомої матриці відстаней між вузлами будемо розглядати як 3-х етапну задачу.

На першому етапі детально розглядається методика синтезу модельних координат 3-х базових вузлів транспортної мережі, на координатному полі якої буде здійснюватись планування та оптимізація маршрутів.

На другому етапі з використанням координат 3-х базових вузлів почергово формуються координати всіх інших вузлів транспортної мережі.

На третьому етапі формується повне координатне поле моделі транспортної мережі, яка точно відповідає апріорно заданій матриці відстаней між відповідними вузлами. Сформована інформація може бути використана в якості апріорних даних для відомих програмних пакетів, що забезпечують ефективне розв'язання задач класу TSP та CVRP.

Синтез модельних координат 3-х базових вузлів транспортної мережі

Розглянемо будь-який набір з трьох вузлів, наприклад, підмножину вузлів №1, №2 та №3 з відповідними парами координат x_1, y_1 , x_2, y_2 , x_3, y_3 , які є компонентами загальної множини вузлів $A = 1, 2, ..., N-1, N$, для яких розв'язуються задачі TSP або CVRP, де N - загальна кількість вузлів. Позначимо відстань між вузлами i та j, тобто між парою вузлів

i, j , як $L_{ij}, i=1,...,N; j=1,...,N$. Тоді для пар вузлів $1,2$, $1,3$ та $3,2$ можна сформувати систему рівнянь (1)-(3) у наступному вигляді:

$$x_1 - x_2\ ^2 + \ y_1 - y_2\ ^2 = L_{12}^2, \quad (1)$$

$$x_1 - x_3\ ^2 + \ y_1 - y_3\ ^2 = L_{13}^2, \quad (2)$$

$$x_3 - x_2\ ^2 + \ y_3 - y_2\ ^2 = L_{32}^2, \quad (3)$$

де для симетричної матриці $\|L_{ij}\|$ відстаней між вузлами мають місце співвідношення

$$L_{12} = L_{21}, L_{13} = L_{31}, L_{32} = L_{23}.$$

При відсутності апріорної інформації стосовно координат x_1, y_1 , x_2, y_2 , x_3, y_3 доцільно прийняти за точку перетину O декартових осей координат OX, OY на площині поля всіх N вузлів положення одного з вузлів $1,2,3$, наприклад вузла №1, прийнявши при цьому нульовими значення його координат:

$$x_1 = 0, \quad (4)$$

$$y_1 = 0. \quad (5)$$

Враховуючи (4) та (5), систему рівнянь (1)-(3) можна трансформувати наступним чином

$$x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} = L_{12}^2, \quad (6)$$

$$x_3^{\ 2} + y_3^{\ 2} = L_{13}^2, \quad (7)$$

$$x_3 - x_2\ ^2 + \ y_3 - y_2\ ^2 = x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2 = L_{32}^2. \quad (8)$$

При цьому після деяких перетворень рівняння (8) приймає вигляд (9)

$$x_2^2 + y_2^2 \ + \ x_3^2 + y_3^2 \ - 2 \ x_2x_3 + y_2y_3 \ = L_{32}^2, \quad (9)$$

а з врахуванням (6)-(7) – відповідно (10) та (11)

$$L_{12}^2 + L_{13}^2 - 2 \ x_2x_3 + y_2y_3 \ = L_{32}^2, \quad (10)$$

$$x_2x_3 + y_2y_3 = \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ / 2. \quad (11)$$

З рівнянь (6)-(7) знайдемо параметри x_2 та x_3

$$x_2 = \pm\sqrt{L_{12}^2 - y_2^2}, \quad (12)$$

$$x_3 = \pm\sqrt{L_{13}^2 - y_3^2}. \quad (13)$$

Підставляючи вирази (12)-(13) в рівняння (11), отримаємо рівняння (14)

$$\sqrt{L_{12}^2 - y_2^2}\sqrt{L_{13}^2 - y_3^2} + y_2y_3 = \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ / 2, \quad (14)$$

яке після наступних перетворень

$$\sqrt{\ L_{12}^2 - y_2^2 \quad L_{13}^2 - y_3^2} \ = \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ / 2 - y_2y_3,$$

$$L_{12}^2 - y_2^2 \quad L_{13}^2 - y_3^2 \ = \left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ / 2 - y_2y_3 \right]^2,$$

$$L_{12}^2L_{13}^2 - L_{12}^2y_3^2 - L_{13}^2y_2^2 + y_2^2y_3^2 = \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 / 4 - \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ y_2y_3 + y_2^2y_3^2$$

може бути приведене до квадратного рівняння відносно параметра y_2

$$L_{13}^2y_2^2 - \left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ y_3 \right] y_2 + \left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 / 4 - L_{12}^2L_{13}^2 + L_{12}^2y_3^2 \right] = 0, \quad (15)$$

деякі з коефіцієнтів якого є функціями від параметру y_3, зокрема

$$k_a y_2^2 - f_b \ \ y_3 \ \ y_2 + f_c \ \ y_3 \ = 0, \quad (16)$$

де $k_a = L_{13}^2$;

$$k_b = f_b \ \ y_3 \ = \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ \ y_3;$$

$$k_c = f_c \ \ y_3 \ = \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 / 4 - L_{12}^2L_{13}^2 + L_{12}^2y_3^2.$$

Знайдемо корені $y_{2\ 1,2}$ рівняння (16) для $D = k_c^2 - 4k_ak_c$

$$y_{2\ 1,2} = \frac{k_b \pm \sqrt{k_c^2 - 4k_ak_c}}{2k_a},$$

$$y_{2\ 1,2} = \frac{\left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ \ y_3 \right] \pm \sqrt{D}}{2L_{13}^2}, \quad (17)$$

$$y_{2\ 1} = \frac{\left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ \ y_3 \right] + \sqrt{D}}{2L_{13}^2},$$

$$y_{2\ 2} = \frac{\left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ \ y_3 \right] - \sqrt{D}}{2L_{13}^2}.$$

Корені $y_{2\ 1}, y_{2\ 2}$ будуть дійсними числами при умові

$$D = \left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \ \ y_3 \right]^2 - 4L_{13}^2 \left[\ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 / 4 - L_{12}^2L_{13}^2 + L_{12}^2y_3^2 \right] \geq 0. \quad (18)$$

Перевіримо в подальшому виконання умови (18) шляхом проведення наступних перетворень

$$L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 y_3^2 - \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 L_{13}^2 + 4L_{13}^2L_{12}^2L_{13}^2 - 4L_{13}^2L_{12}^2y_3^2 \geq 0$$

$$L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 \ \ y_3^2 - L_{13}^2 \ - 4L_{13}^2L_{12}^2 \ \ y_3^2 - L_{13}^2 \ \geq 0. \quad (19)$$

На основі аналізу рівняння (7) можна сформувати нерівність (20)

$$y_3^2 - L_{13}^2 \ < 0. \quad (20)$$

З врахуванням (20) умова (19) послідовно трансформується до виду (21)

$$L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2\ ^2 \leq 4L_{13}^2L_{12}^2, \ L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \leq 2L_{13}L_{12}. \quad (21)$$

В свою чергу для будь-якого трикутника, у якого сторони L_{12} та L_{13} розташовані під кутом α, справедливими є співвідношення:

$$L_{12}^2 - 2L_{13}L_{12}\cos\alpha + L_{13}^2 = L_{32}^2,$$

$$L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 = 2L_{13}L_{12}\cos\alpha.$$

Оскільки для $\forall\alpha \in \ 0, 2\pi$ має місце $\cos\alpha \in \ -1, +1$, то завжди (враховуючи, що максимальне значення складової $\cos\alpha$ дорівнює одиниці, тобто $\mathrm{Max}\cos\alpha = 1$) справедливим є співвідношення

$$2L_{13}L_{12}\cos\alpha \leq 2L_{13}L_{12}.$$

Таким чином, завжди має місце виконання умови (21)

$$L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{32}^2 \le 2L_{13}L_{12},$$

що забезпечує в (17) невід'ємність дискримінанта $D = k_c^2 - 4k_a k_c \ge 0$, а отже корені $y_{2\,1,2}$ завжди будуть дійсними числами.

При відсутності апріорної інформації відносно значення параметра y_3 та взаємного розташування вузлів №1 та №3 необхідно задати значення параметра y_3, виходячи з умови (20), тобто з врахуванням обмеження

$$|y_3| < L_{13}. \qquad (22)$$

В подальшому для заданої координати y_3 необхідно обчислити корені $y_{2\,1}, y_{2\,2}$ рівняння (15), один з яких, наприклад $y_{2\,1}$, необхідно обрати для подальших розрахунків, тобто $y_2 = y_{2\,1}$. Використовуючи значення координат y_2, y_3 та залежності (12), (13), можна обчислити параметри x_2, x_3.

На основі проведених авторами досліджень встановлено, що для формування модельних координат x_2, x_3 необхідно враховувати співвідношення між знаками відповідних пар координат x_3, y_3 та x_2, y_2, зокрема

$$x_3 = sign\ y_3 \sqrt{L_{13}^2 - y_3^2}, \qquad (23)$$

$$x_2 = -sign\ y_2 \sqrt{L_{12}^2 - y_2^2}. \qquad (24)$$

Отже задані та обраховані координати x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 будуть мати числові значення, які відповідають попередньо заданим дистанційним параметрам $L_{12} = L_{21}, L_{13} = L_{31}, L_{32} = L_{23}$.

При цьому слід зазначити, що положення отриманої моделі трикутника з координатами вершин x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 можуть не відповідати реальному положенню даних вершин, а отримана модель трикутника на основі вузлів №1, №2 та №3 в системі координат OXY може бути повернута в площині OXY на кут $\gamma \in 0, 2\pi$ навколо початкової точки координат O, положення якої з врахуванням (4),(5) співпадає з положенням вузла №1. Довжини ж всіх сторін (відстані між відповідними вузлами №1, №2 та №3) та значення кутів між відповідними сторонами модельного та реального трикутників будуть співпадати.

При виборі для подальших розрахунків кореня $y_{2\,2}$, тобто при $y_2 = y_{2\,2}$, формується інша апріорна модель початкового трикутника, в якій вершина №2 буде симетричною (відносно сторони трикутника з вершинами №1 та №3) відповідній вершині №2, модельні координати якої сформовані для випадку $y_2 = y_{2\,1}$.

Синтез модельних координат повної множини вузлів транспортної мережі

Після формування координат моделі трикутника з вершинами, в яких знаходяться модельні вузли №1, №2 та №3, здійснимо синтез алгоритму формування координат будь-якого i-го вузла, $i \in A, 3 < i \le N$.

Для вузла $i > 3$ з координатами x_i, y_i можна сформувати три наступні рівняння

$$x_1 - x_i\ ^2 + \ y_1 - y_i\ ^2 = L_{1i}^2, \qquad (25)$$

$$x_2 - x_i\ ^2 + \ y_2 - y_i\ ^2 = L_{2i}^2, \qquad (26)$$

$$x_3 - x_i\ ^2 + \ y_3 - y_i\ ^2 = L_{3i}^2. \qquad (27)$$

Рівняння (25)-(27) можна трансформувати до виду (28)-(30)

$$x_1^2 - 2x_1x_i + x_i^2 + y_1^2 - 2y_1y_i + y_i^2 = L_{1i}^2, \qquad (28)$$

$$x_2^2 - 2x_2x_i + x_i^2 + y_2^2 - 2y_2y_i + y_i^2 = L_{2i}^2, \qquad (29)$$

$$x_3^2 - 2x_3x_i + x_i^2 + y_3^2 - 2y_3y_i + y_i^2 = L_{3i}^2, \qquad (30)$$

а після деяких перетворень (31)-(33)

$$x_i^2 + y_i^2 - 2\ \ x_1x_i + y_1y_i\ \ = L_{1i}^2 - \ x_1^2 + y_1^2\ \ , \qquad (31)$$

$$x_i^2 + y_i^2 - 2\ \ x_2x_i + y_2y_i\ \ = L_{2i}^2 - \ x_2^2 + y_2^2\ \ , \qquad (32)$$

$$x_i^2 + y_i^2 - 2\ \ x_3x_i + y_3y_i\ \ = L_{3i}^2 - \ x_3^2 + y_3^2\ \ , \qquad (33)$$

вводячи позначення (34)-(36)

$$x_1^2 + y_1^2\ \ = a, \qquad (34)$$

$$x_2^2 + y_2^2\ \ = b, \qquad (35)$$

$$x_3^2 + y_3^2\ \ = c, \qquad (36)$$

отримаємо систему з двох рівнянь (37) та (38)

$$x_2x_i + y_2y_i\ \ - \ x_1x_i + y_1y_i\ \ = \left[L_{1i}^2 - L_{2i}^2 - \ a - b\ \right]/2, \qquad (37)$$

$$x_3x_i + y_3y_i\ \ - \ x_2x_i + y_2y_i\ \ = \left[L_{2i}^2 - L_{3i}^2 - \ b - c\ \right]/2. \qquad (38)$$

Трансформуємо рівняння (37)-(38) до виду (39)-(40)

$$x_2 - x_1\ \ x_i + \ y_2 - y_1\ \ y_i = \left[L_{1i}^2 - L_{2i}^2 - \ a - b\ \right]/2, \qquad (39)$$

$$x_3 - x_2\ \ x_i + \ y_3 - y_2\ \ y_i = \left[L_{2i}^2 - L_{3i}^2 - \ b - c\ \right]/2. \qquad (40)$$

З рівняння (39) отримаємо

$$x_i = \frac{\left[L_{1i}^2 - L_{2i}^2 - \ a - b\ \right]/2 - \ y_2 - y_1\ \ y_i}{x_2 - x_1} \qquad (41)$$

і підставимо (41) в рівняння (40)

$$x_3 - x_2\ \frac{\left[L_{1i}^2 - L_{2i}^2 - \ a - b\ \right]/2 - \ y_2 - y_1\ \ y_i}{x_2 - x_1} + \ y_3 - y_2\ \ y_i = \left[L_{2i}^2 - L_{3i}^2 - \ b - c\ \right]/2. \qquad (42)$$

Здійснюючи відповідні перетворення над рівнянням (42)

$$\left[\ x_2-x_1\quad y_3-y_2\ -\ x_3-x_2\quad y_2-y_1\ \right]y_i=\ x_2-x_1\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]/2-$$
$$-\ x_3-x_2\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]/2$$

отримаємо в остаточному вигляді модель (43) координати y_i

$$y_i=\frac{x_2-x_1\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]/2}{\left[\ x_2-x_1\quad y_3-y_2\ -\ x_3-x_2\quad y_2-y_1\ \right]}-\frac{x_3-x_2\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]/2}{\left[\ x_2-x_1\quad y_3-y_2\ -\ x_3-x_2\quad y_2-y_1\ \right]} \qquad (43)$$

яка функціонально залежить тільки від попередньо відомих аргументів $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}$.

Для синтезу моделі координати x_i здійснимо аналогічні (41)-(43) перетворення, для чого з рівняння (40) отримаємо

$$y_i=\frac{\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]/2-\ x_2-x_1\ \ x_i}{y_2-y_1}$$

і підставимо в рівняння (39)

$$x_3-x_2\ \ x_i+\ y_3-y_2\ \frac{\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]/2-\ x_2-x_1\ \ x_i}{y_2-y_1}=\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]/2,$$

з якого після відповідних трансформацій (44),(45)

$$\left[\ x_3-x_2\quad y_2-y_1\ -\ x_2-x_1\quad y_3-y_2\ \right]x_i=\ y_2-y_1\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]/2-$$
$$-\ y_3-y_2\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]/2$$
, (44)

$$x_i=\frac{y_2-y_1\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]/2}{x_3-x_2\quad y_2-y_1\ -\ x_2-x_1\quad y_3-y_2}-\frac{y_3-y_2\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]/2}{x_3-x_2\quad y_2-y_1\ -\ x_2-x_1\quad y_3-y_2}$$
, (45)

отримаємо в остаточному вигляді модель (46) координати x_i

$$x_i=\frac{y_3-y_2\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]/2}{x_2-x_1\quad y_3-y_2\ -\ x_3-x_2\quad y_2-y_1}-\frac{y_2-y_1\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]/2}{x_2-x_1\quad y_3-y_2\ -\ x_3-x_2\quad y_2-y_1} \qquad (46)$$

Координата x_i також функціонально залежить від попередньо відомих аргументів $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3,$ L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}. Вводячи позначення

$$d=\ x_2-x_1\quad y_3-y_2\ -\ x_3-x_2\quad y_2-y_1\ , \qquad (47)$$

сформуємо розрахункові формули для модельних координат $x_i^M, y_i^M\ \ , i=4,...,N$:

$$x_i^M=\ \ y_3-y_2\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]-\ y_2-y_1\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]\ /\ 2d$$
, (48)

$$y_i^M=\ \ x_2-x_1\left[L_{2i}^2-L_{3i}^2-\ b-c\ \right]-\ x_3-x_2\left[L_{1i}^2-L_{2i}^2-\ a-b\ \right]\ /\ 2d$$
. (49)

Результати моделювання

Для апробації розроблених математичних моделей (4), (5), (17), (22), (23), (23), (48) та (49) розглянемо координатне поле (рис. 1) з 21 реальних вузлів, що входять до складу відповідної транспортної мережі. Апріорно відомою є матриця відстаней $\left\|L_{ij}\right\|, i, j=\ 1,...,N\ \ , N=21$ між вузлами розміром (21x21).

Фрагмент матриці відстаней розміром (5x5) для перших 5-ти вузлів наведено в таблиці 1. Матриця відстаней $\left\|L_{ij}\right\|, i, j=\ 1,...,21$ сформована для реальних координат кожного з 21-го вузлів, числові значення яких наведені в колонках 2 та 3 таблиці 2. Вважається, що апріорна інформація стосовно реальних координат вузлів є невідомою. Необхідно сформувати множину модельних координат (48), (49) для всіх 21 вузлів, які будуть повністю відповідати значенням елементів матриці відстаней $\left\|L_{ij}\right\|, i, j=\ 1,...,N\ \ , N=21$.

Таблиця 1

Фрагмент матриці відстаней

№	1	2	3	4	5
1	0	14.5602	23.0217	26.4197	33.0606
2	14.5602	0	24.2074	12.7279	8.5440
3	23.0217	24.2074	0	26.0000	42.2019
4	26.4197	12.7279	26.0000	0	18.0278
5	33.0606	8.5440	42.2019	18.0278	0

В якості 3-х базових вузлів обираємо вузли V1, V2 та V3 (рис. 2), апріорна інформація стосовно координат яких вважається невідомою.

Згідно наведеному вище підходу сформуємо декілька координатних моделей 3-х базових вузлів, зокрема:

а) *модель A* : задаємо значення $x_1^M=0; y_1^M=0$ згідно (4), (5); обираємо $y_3^M=-15$ згідно (22) ; обчислюємо $y_{2\,1}=8,5346; y_{2\,2}=-12,9497$ згідно (17) і обираємо для подальших розрахунків $y_2^M=y_{2(1)}=8,5346$; обчислюємо відповідні значення модельних координат $x_2^M=-11,7966$ згідно (24) та $x_3^M=-17,4642$ згідно (23); модель *A* представлена на рис. 2 модельним трикутником O-V2.1-V3.1;

б) *модель B*: $x_1^M=0; y_1^M=0$; $y_3^M=10$; $y_{2\,1}=14,2265;$; $y_{2\,2}=-11,2831$; $y_2^M=y_{2(1)}=14,2265$; $x_2^M=-3,0992$; $x_3^M=20,7364$; модель *B* представлена на рис. 2 модельним трикутником O-V2.2-V3.2(3);

в) *модель C*: $x_1^M=0; y_1^M=0$; $y_3^M=10$; $y_{2\,1}=14,2265;$ $y_{2\,2}=-11,2831;$ $y_2^M=y_{2(2)}=-11,2831$; $x_2^M=9,2027$; $x_3^M=20,7364$; модель *C* представлена на рис. 2 модельним трикутником O-V2.3-V3.2(3).

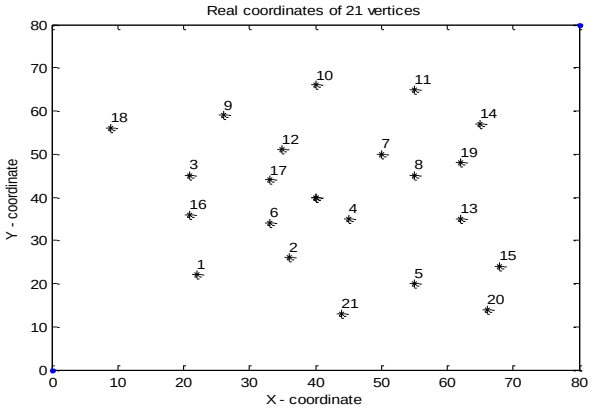

Рис. 1. Координатне поле для 21-го реальних вузлів транспортної мережі

На рис. 2 наведено синтезовані координатні моделі *A*, *B* та *C*, будь-яка з яких може бути використана для побудови координатного поля модельних вузлів транспортної мережі. В таблиці 2 наведені модельні координати $x_i^M, y_i^M \quad, i = 1,...,N$, що сформовані на основі (48) та (49) для «моделі *B*» 3-х базових вузлів.

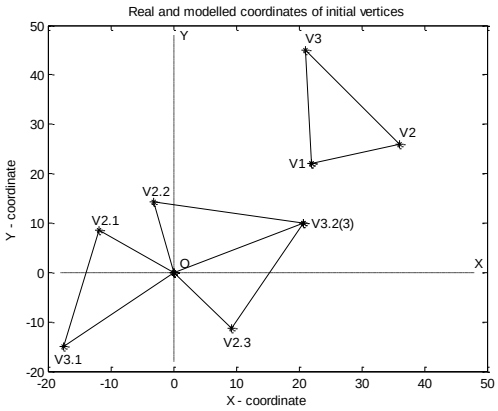

Рис. 2. Координатне поле 3-х базових вузлів

На рис. 3 та рис. 4 наведено координатні поля модельних вузлів, синтезованих на основі базових «моделей *B* та *C*», відповідно. В обох випадках розташування модельних вузлів відповідає заданій матриці відстаней $\|L_{ij}\|$ між вузлами.

Таблиця 2

Реальні та модельні координати вузлів транспортної мережі

№	Реальні координати		Модельні координати (*B*)	
	x_i	y_i	x_i^M	y_i^M
1	22	22	0	0
2	36	26	-3.0992	14.2265
3	21	45	20.7364	10.0000
4	45	35	0.5721	26.4135
5	55	20	-17.3740	28.1273
6	33	34	5.3682	15.3682
7	50	50	11.4219	37.9150
8	55	45	4.6514	39.9546
9	26	59	30.7052	21.0284
10	40	66	30.2490	36.6743
11	55	65	22.2717	49.4165
12	35	51	19.3993	25.1728
13	62	35	-7.4704	41.3908
14	62	57	11.9119	51.7989
15	62	24	-17.1616	36.1868
16	21	36	12.8073	5.7422
17	33	44	14.1783	20.0992
18	9	56	36.1047	4.6318
19	62	48	3.9828	47.5410
20	66	14	-27.8641	34.9800
21	44	13	-18.3371	15.1245

Висновок

При застосуванні програмного забезпечення для розв'язку задачі TSP (21 вузол транспортної мережі) на основі генетичного алгоритму отримані значення $L_{TSP} = 260,0982$ для реального (рис.1) та модельних $L_{TSP} = 262,8487, L_{TSP} = 260,099$ (рис. 3,4) координатних полів вузлів. Результати моделювання підтверджують працездатність та ефективність розроблених моделей і алгоритмів.

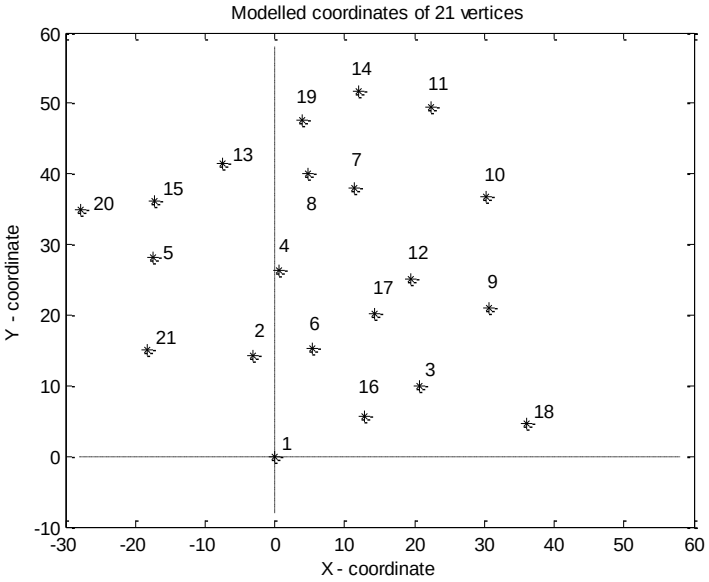

Рис. 3. Координатне поле модельних вузлів на основі «*моделі B*»

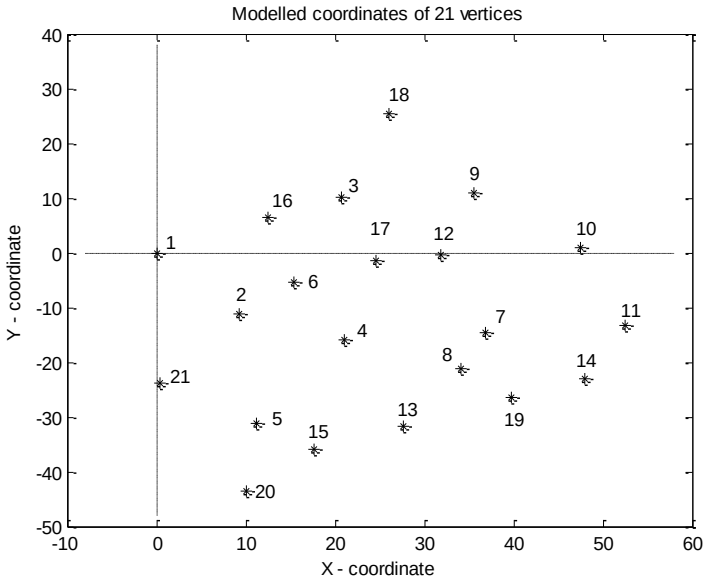

Рис. 4. Координатне поле модельних вузлів на основі «*моделі C*»

ЛІТЕРАТУРА

1. Encheva S., Kondratenko Y., Solesvik M.Z. and Tumin S. Decision Support Systems in Logistics. International Electronic Conference on Computer Science (IeCCS'2007), Nov. 30-Dec.10, 2007. Book Series: AIP Conference Proceedings (Simos T.E., Psihoyios G., Eds.), Publisher: American Institute of Physics, USA, 2008, pp. 254-256.
2. Кондратенко Г. В., Явішева І. В. Проблеми оптимізації транспортних потоків в умовах невизначеності // Технічні вісті, Вип. 1(22), 2(23), 2006, сс. 24-27.
3. Kondratenko G. V., Kondratenko Y. P., Romanov D. O. Fuzzy Models for Capacitative Vehicle Routing Problem in Uncertainty // Proceeding of the 17th Intern. DAAAM Symposium «Intelligent Manufacturing and Automation», 8-11 November, 2006, Vienna, Austria, pp. 205-206.
4. Kondratenko Y. P. Optimisation problems in marine transportation // Incidencia de las relaciones economicas internacionales en la recuperacion economica del area mediterranea. Barcelona: Real Academia de Ciencias Economicas y Financieras, 2011. – pp. 43-52.
5. Kondratenko Y. P., Werners B., Kondratenko G. V. Fuzzy Algorithm and Models for CVRP Decision Support in Uncertainty // Электроника и связь, № 1(36), 2007, сс. 70-77.
6. Laporte G. The Traveling Salesman Problem: An overview of exact and approximate algorithms // European Journal of Operational Research 59, 231-248, 1992.

7. Laporte G. The Vehicle Routig Problem: An overview of exact and approximate algorithms // European Journal of Operational Research 59, 345-358, 1992.
8. Малахов В. П., Кондратенко Г. В. Аналіз задач класу VRP і алгоритми формування та оптимізації маршрутів рухомих об'єктів // Proceeding of 7-th International Modelling School of AMSE-UAPL, 12-17 September 2002, Alushta, Ukraine, pp. 21-24.
9. Sule D. R. Logistics of Facility Location and Allocation // New York-Basel: Marcel Dekker, Inc., 2001, 459 p.
10. Taniguchi E., Thompson R. G., Yamada T., Duin R. City Logistics: Network Modelling and Intelligent Transport Systems. Pergamon, Elsevier Science Ltd., Amsterdam-London-New York, Oxford, 2001, 252 p.
11. Toth P., Vigo D. (Eds). The vehicle routing problem // SIAM, Philadelphia, USA, 2002, 367 p.
12. Werners B., Kondratenko Y. P. Fuzzy Multi-Criteria Optimisation for Vehicle Routing with Capacity Constraints and Uncertain Demands // Proceedings of the International Congress on Cost Control (17-18 March, 2011, Barcelona, Spain), Publ. by ACCID/ASEPUC, Barcelona, 2011, pp. 145-159.
13. Werners B., Kondratenko Y. P. Tanker routing problem with fuzzy demands of served ships // Системні дослідження та інформаційні технології. – №1, 2009, сс.47-64.
14. Werners B., Kondratenko Y. P. Tanker Routing Problem With Fuzzy Demand // Arbeitsberichte zur Unternehmensforschung Nr. 2001/04. Fakultät für Wirtschaftswissenschaft, Ruhr-Universität Bochum, Deutschland, April 2001.

© Кондратенко Г. В.,
Кондратенко Ю. П.
Сіденко Є. В.
Чабан В. Й., 2012

Дата надходження статті до редколегії 23.04.2012 р.

КОНДРАТЕНКО Г. В. – к.т.н., доцент, Чорноморський державний університет імені Петра Могили.
Коло наукових інтересів: Теорія автоматичного керування.

КОНДРАТЕНКО Ю. П. – д.т.н., професор, Чорноморський державний університет імені Петра Могили.
Коло наукових інтересів: Теорія автоматичного керування, нечітка логіка, методи прийняття рішень.

СІДЕНКО Є. В. – аспірант, Чорноморський державний університет імені Петра Могили.
Коло наукових інтересів: Теорія автоматичного керування, нечітка логіка.

ЧАБАН В. Й. – д.т.н., професор, Національний університет «Львівська політехніка».
Коло наукових інтересів: Теорія автоматичного керування.