УДК 519.14

*Коваленко І. І., Передерій В. І., Швед А. В.*

# ДИНАМІЧНИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ІЄРАРХІЧНИХ СТРУКТУР

*У статті розглянуто основні положення теорії графодинамічних систем та запропонована систематизована структура, що відображає основні види операцій та відповідні їм задачі. Досліджуваний математичний апарат може бути використаний для аналізу та моделювання динамічних процесів, що відбуваються в структурах ієрархічного типу.*

***Ключові слова:*** *комп'ютерні мережі, графодинаміка, функція підпорядкування, ієрархічні структури.*

*В статье рассмотрены основные положения теории графодинамических систем и предложена систематизированная структура, которая отображает основные виды операций и соответствующие им задачи. Исследуемый математический аппарат может быть использован для анализа и моделирования динамических процессов, которые происходят в структурах иерархического типа.*

***Ключевые слова:*** *компьютерные сети, графодинамика, функция подчинения, иерархические структуры.*

*The basic concepts of the theory of graph-dynamic's systems and the structure that reflects the main types of transactions and the corresponding tasks are considered in this article. The proposed mathematical tools could be used for analysis and modeling of dynamic processes occurring in the hierarchical structures.*

***Key words****: computer networks, graph-dynamics, subordination function, hierarchical structure.*

**Вступ**

Сучасні інформаційні структури, покладені в основу комп'ютерних систем і мереж, характеризуються великою різноманітністю і високою складністю. Для математичного опису таких структур досить часто використовуються ієрархічні графи [6], що дозволяє проводити їх аналіз за допомогою вирішення двох основних видів задач [1]:

– *статичні*, коли граф вважається фіксованим і досліджуються деякі його властивості (аналіз шляхів на графі, наявність замкнутих шляхів, можливість тієї чи іншої розкраски або розмітки вершин та інше);

– *динамічні*, коли граф також є фіксованим, його ребра визначають можливі шляхи, і досліджуються різні способи розгортання в часі шляхів, що прокладаються на графі.

Разом з такою постановкою задачі динаміки, існує безліч прикладів, що приводять до іншої її постановки, коли динаміка пов'язана не з рухом по графу, а зі зміною самого графу. При цьому об'єктом проходження є весь граф вцілому [1]. Такі задачі виникають, коли ця структура не зафіксована, а змінюється і задача полягає у вивченні «життя» цієї структури. Сукупність методів опису та вивчення таких систем була названа «графодинамікою» [1; 2; 5].

У якості типового прикладу, що ілюструє те, як виникають задачі графодинаміки, розглянемо організацію територіально-розподілених комп'ютерних мереж (Wide Area NETWORK-WAN), що складаються з ПЕОМ розташованих на великих відстанях в різних регіонах.

Розвиток таких мереж за допомогою підключення нових районів, викликає зміну розподілу низових елементів структури (мережевих вузлів), що через закони, за якими ці вузли підпорядковуються вищестоящим, робить неминучим поступове перетворення вищестоящих елементів структури мережі. Іншими словами, хвиля подібних перетворень, що виникає «знизу», викликає перетворення, що рухатимуться «з низу вгору» [1; 2].

**Постановка задачі**

Метою статті є викладення основних положень теорії графодинамічних систем і розгляд прикладів використання деяких графодинамічних операцій. Це пов'язано перш за все з тим, що основи теорії графодинаміки були розглянуті її авторами в роботах [1; 2] в середині 70-х років минулого століття.

Проте, як відзначають автори роботи [3], ця теорія, що випередила свій час, не отримала подальшого розвитку. Причини, швидше за все, у колишній відсутності предметних областей, із значимими об'єктами використання. Необхідність у математичній теорії графодинамічних систем стає очевидною лише зараз, у зв'язку з формуванням комп'ютерно-мережевого інформаційного простору, зростаючими потоками і об'ємами структурованої інформації.

У загальному вигляді постановка задачі графодинамічного аналізу може бути сформульована таким чином: об'єктом дослідження є та або інша структура, її зміна в часі відбувається за деякими правилами або законами; ці зміни можуть бути або автономними, або викликаними зовнішніми для системи діями; в результаті виникають динамічні процеси зміни структури, які власне, і підлягають опису і вивченню [1; 2; 5].

**Основні положення теорії графодинамічних систем**

Припустимо, що $x(t)$ – граф, що існує у момент часу $t$, тоді закон зміни графа в часі може бути записаний у формі деякого рекурентного процесу:

$$x(t+1) = F[x(t)], \tag{1}$$

де $F$ – деякий оператор над графом, що перетворює граф, досліджуваний в момент часу $t$, в граф, який з'являється у момент часу $t + 1$. Припустимо, що $x(0)$ – початковий граф, а послідовність графів $x_i(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, що виникає з $x(0)$ в силу (1), – графова траєкторія. Будемо вважати, що граф $x^*$ є рівноважним, якщо виконується співвідношення $x^* = F(x^*)$.

Безліч графів $x(0)$, для яких в силу (1) в деякий момент встановлюється задана рівновага $x^*$, називається областю тяжіння або збіжності цієї рівноваги, а сам факт встановлення рівноваги при деякому $x(0)$ – збіжністю до рівноваги. Якщо в результаті процесу (1), що починається з деякого графа $x(0)$, знайдуться момент $t = T$ та додатне ціле число $k > 1$, такі, що $x(T + k) = x(t)$, говорять про виникнення графового циклу довжини $k$ (на відміну від циклу на графі).

Об'єктом вивчення графодинаміки є клас графів, що визначається наступними двома умовами:

1) кожний граф з цього класу є деревом (з одним коренем) або складається з декількох таких дерев («ліс»);

2) скрізь, окрім особливо обумовлених випадків, передбачається, що число вершин скінчене і дорівнює $N$ і що вершини графа пронумеровані додатними цілими числами – 1, 2, 3 ... $N$.

Накладемо на нумерацію вершин наступну умову: номер будь-якої вершини завжди більше номера тієї вершини, якій вона «підпорядкована» (тобто від якої відходить дуга, що веде до даної вершини). За цієї умови нумерація встановлює порядок серед вершин даного рівня ієрархії, який не обмежений порядком, встановленим на попередньому вищому ярусі. Він ніби обумовлює «старшинство» вершин даного рівня. Така нумерація отримала назву правильної. У подальших прикладах будемо вважати початковою наступну нумерацію вершин дерева: число 1 надається завжди кореню, далі нумеруються зліва на право вершини безпосередньо пов'язані з коренем, вершини наступного рівня нумеруються зліва на право наступними номерами і так далі (рис. 1, а). Якщо граф – ліс, то його вершини нумеруються аналогічно: зліва на право і зверху вниз (рис. 1, б).

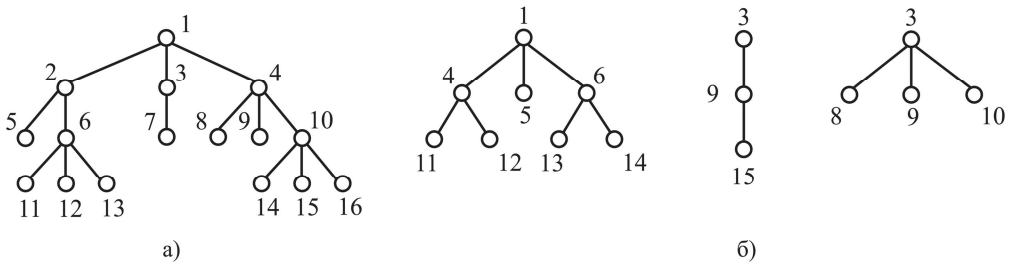



**Рис. 1.** Графи:
а) дерево; б) ліс

Введемо цілочисельну функцію $\varphi(n)$, задану на множині додатних цілих чисел та визначену на множині всіх невід'ємних чисел – 0, 1, 2, 3..., таким чином: $n$ – номер вершини дерева, а $\varphi(n)$ – номер тієї вершини попереднього рівня з якою пов'язана (якій «підпорядкована») вершина з номером $n$. Така цілочисельна функція отримала назву ***функція підпорядкування***, або, коротко, П-функція. Хоча аргумент функції набуває лише значень 1, 2, 3..., функція $\varphi(n)$ може дорівнювати нулю.

Це значення використовують для довизначення $\varphi(n)$ у тих випадках, коли вершина з номером $n$ не підпорядкована жодній вершині дерева. Передбачається, що для номера кореня дерева $\varphi(n) = 0$.

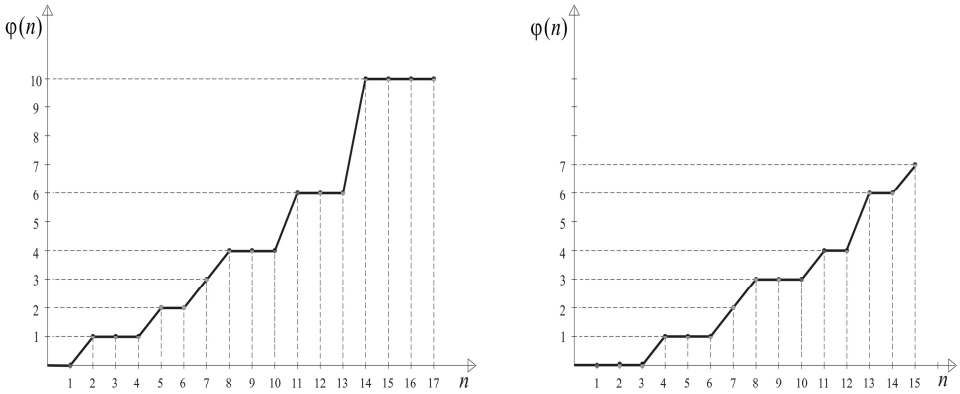
Цілочисельна П-функція задовільняє наступним обмеженням:

1) $\varphi(n) < n$, тобто номер будь-якої вершини завжди більше номера тієї вершини, якій вона «підпорядкована»;

2) $\varphi(n)$ визначена на всіх цілих $n$ від 1 до деякого $N$;

3) $\varphi(n) = 0$ – означає, що вершина графа з номером $n$ не підпорядкована жодній вершині, тобто це обмеження характеризує процедуру появи кореня (кореневої вершини) дерева.

Будь-яке правильно пронумероване дерево породжує єдину П-функцію. Припустимо, що на множині чисел 1, 2, 3..., задана довільна цілочисельна $\varphi(n)$-функція, що задовольняє вказаним умовам і число $N$. Тоді за такою функцією і числом $N$ можна відновити граф (не обов'язково однозв'язний) з пронумерованими вершинами, кожна компонента якого є дерево (тобто відновити дерево або ліс). На рис. 2 показані приклади функцій $\varphi(n)$, що відповідають графам, зображеним на рис. 1.




а) б)

**Рис. 2.** П-функції:
а) для графа дерева на рис. 1, а; б) для графа-лісу на рис. 1, б

Припустимо, що по деяким причинам граф, показаний на рис. 1, змінюється в часі і виникає послідовність графів така, що кожен граф послідовності є або деревом, або лісом. При «розгортанні» цієї послідовності в часі однозв'язний граф може перейти в багатозв'язний, тобто можуть утворитися нові корені і «зростаючі» з них дерева; в середині даного дерева може виникати перепідпорядкування вершин і т. п.

Кожному графу цієї послідовності відповідає визначена П-функція. Таким чином, послідовність графів, що змінюють один одного, тобто графова траєкторія може бути представлена як послідовність П-функцій:

$$\varphi^{t=1}(n) \to \varphi^{t=2}(n) \to \varphi^{t=3}(n) \to \ldots$$

Розглянемо деяке рекурентне співвідношення:

$$\varphi^{t+1}(n) = F\left(\varphi^{t}(n)\right), \tag{2}$$

де $F$ – заданий оператор. Якщо заданий початковий граф $\varphi^0(n)$, то співвідношення (1) розгортає послідовність графів – графову траєкторію. Оператор $F(\varphi(n))$ залежить лише від значення $\varphi$ в точці $n$, тому він виявляється також деякою цілочисельною функцією.

Опишемо ряд операцій над П-функцією, які переводять її в іншу П-функцію і не залежать від будь-яких інших П-функцій, тим самим виконується перетворення ієрархічної структури, що описується деревом або лісом. Такі операції називаються унарними і визначаються виразом (2). Бінарні операції, що проводяться над двома П-функціями описуються у вигляді:

$$\varphi^{t+1}(n) = F\left(\varphi^{t}(n), \psi(n)\right), \tag{3}$$

де функція $\psi(n)$ задовільняє тим самим умовам, що і $\varphi(n)$.

Розглянемо приклади унарних і бінарних операцій.

1. Унарна операція декомпозиції представляється функцією, що описується наступним чином:

$$\psi(n) = \left[\frac{\varphi(n)}{k}\right], \; k > 1, \tag{4}$$

де $[a]$ – ціла частина від $a$.

Операція (4) як би ділить вихідне дерево на декілька частин, зберігаючи при цьому загальне число вершин. На прикладі інформаційних структур вона може трактуватися як розділення вихідної топології комп'ютерної мережі на ряд локальних мереж.

На рис. 3 задано графічне представлення виконання даної операції, коли вихідний бінарний граф-дерево перетворюється в два більш простих дерева. Проведемо викладки, що відповідають такому перетворенню (для $k = 2$ та $n = 11$):

$n = 1$: $\varphi(n) = 0$; $\psi(n) = 0$ (вершина 1 є кореневою);

$n = 2$: $\varphi(n) = 1$; $\psi(n) = [1/2] = 0$ (вершина 2 є кореневою);

$n = 3$: $\varphi(n) = 2$; $\psi(n) = 1$ (вершина 3 підпорядкована вершині 1, тобто 3 < 1, де знак «>» або «<» означає порядок відношення);

$n = 4:\ \varphi(n) = 3;\ \psi(n) = [3/2] = 1 \Rightarrow (4 < 1);$

$n = 5:\ \varphi(n) = 4;\ \psi(n) = 2 \Rightarrow (5 < 2);$

$n = 6:\ \varphi(n) = 5;\ \psi(n) = [5/2] = 2 \Rightarrow (6 < 2);$

$n = 7:\ \varphi(n) = 6;\ \psi(n) = 3 \Rightarrow (7 < 3);$

$n = 8:\ \varphi(n) = 7;\ \psi(n) = [7/2] = 3 \Rightarrow (7 < 3);$

$n = 9:\ \varphi(n) = 8;\ \psi(n) = 4 \Rightarrow (9 < 4);$

$n = 10:\ \varphi(n) = 9;\ \psi(n) = [9/2] = 4 \Rightarrow (10 < 4);$

$n = 11:\ \varphi(n) = 10;\ \psi(n) = 5 \Rightarrow (11 < 5);$

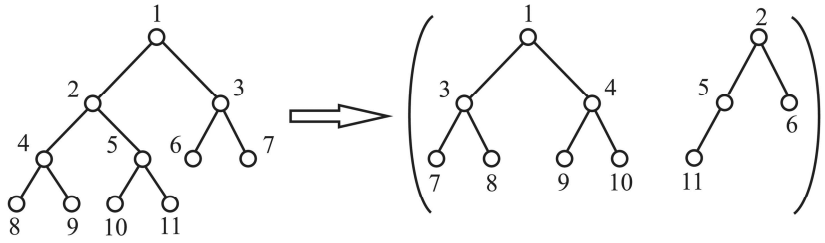



**Рис. 3.** Графічне представлення операції декомпозиції:
а) вихідний граф; б) результат розділення вихідного графа на два

2. Унарна операція «параболічне зростання» описується функцією:

$$\psi(n) = [\sqrt{\varphi(n)}], \tag{5}$$

де $[a]$ – ціла частина від $a$.

Ця операція різко «стискає» число рівнів ієрархії, але разом з цим збільшує число підлеглих вершин зверху вниз по її «поверхах». На рис. 4 наведено перетворення цепочечного графу з 10-ю рівнями ієрархії в граф з трьома рівнями ієрархії.

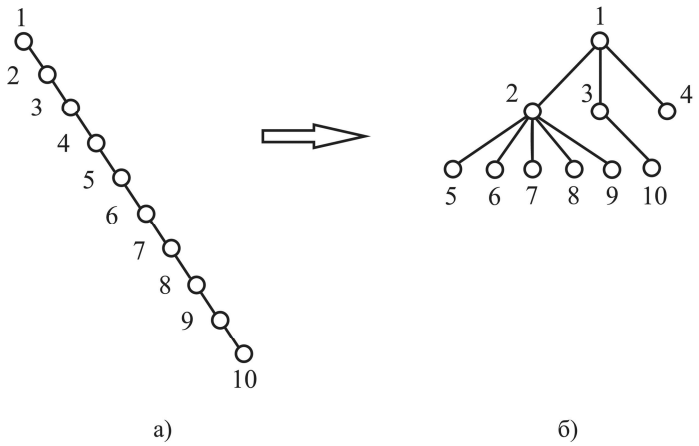



**Рис. 4.** Графічне представлення операції «параболічне зростання»:
а) початковий граф-ланцюжок; б) результат перетворення

Наведемо вищезазначені перетворення у вигляді наступних покрокових процедур (для $k = 2$ та $n = 10$):

$n = 1:\ \varphi(n) = 0;\ \psi(n) = [\sqrt{\varphi(n)}] = 0$ (вершина 1 є кореневою);

$n = 2:\ \varphi(n) = 1;\ \psi(n) = 1 \Rightarrow (2 < 1);$

$n = 3:\ \varphi(n) = 2;\ \psi(n) = [\sqrt{\varphi(2)}] = 1 \Rightarrow (3 < 1);$

$n = 4:\ \varphi(n) = 3;\ \psi(n) = [\sqrt{\varphi(3)}] = 1 \Rightarrow (4 < 1);$

$n = 5:\ \varphi(n) = 4;\ \psi(n) = 2 \Rightarrow (5 < 2);$

$n = 6:\ \varphi(n) = 5;\ \psi(n) = [\sqrt{\varphi(5)}] = 2 \Rightarrow (6 < 2);$

$n = 7:\ \varphi(n) = 6;\ \psi(n) = [\sqrt{\varphi(6)}] = 2 \Rightarrow (7 < 2);$

$n = 8:\ \varphi(n) = 7;\ \psi(n) = [\sqrt{\varphi(7)}] = 2 \Rightarrow (8 < 2);$

$n = 9$: $\varphi(n) = 8$; $\psi(n) = [\sqrt{\varphi(8)}] = 2 \Rightarrow (9 < 2)$;

$n = 10$: $\varphi(n) = 9$; $\psi(n) = [\sqrt{\varphi(9)}] = 3 \Rightarrow (10 < 3)$.

3. Бінарна операція арифметичного усереднення визначається таким чином:

$$\psi(n) = [(\varphi(n) + \pi(n))/2], \tag{6}$$

де $\varphi(n)$ та $\pi(n)$ – дві П-функції; $[a]$ – ціла частина від $a$. На рис. 5 наведено приклад, коли $\varphi(n)$ має цепочечну, а $\pi(n)$ – віялову структури (рис. 5, а).

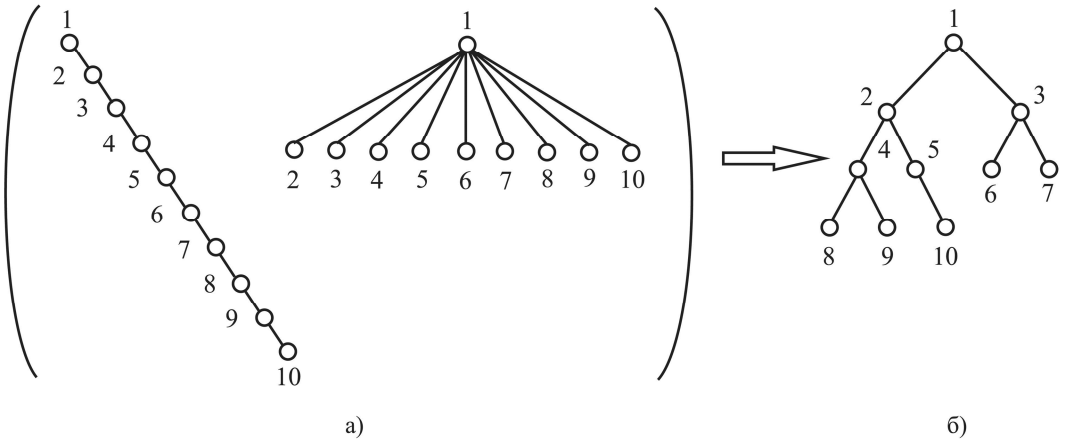



**Рис. 5.** Графічне представлення бінарної операції арифметичного усереднення:
а) вихідні цепочечний та віяловий графи; б) результат перетворення

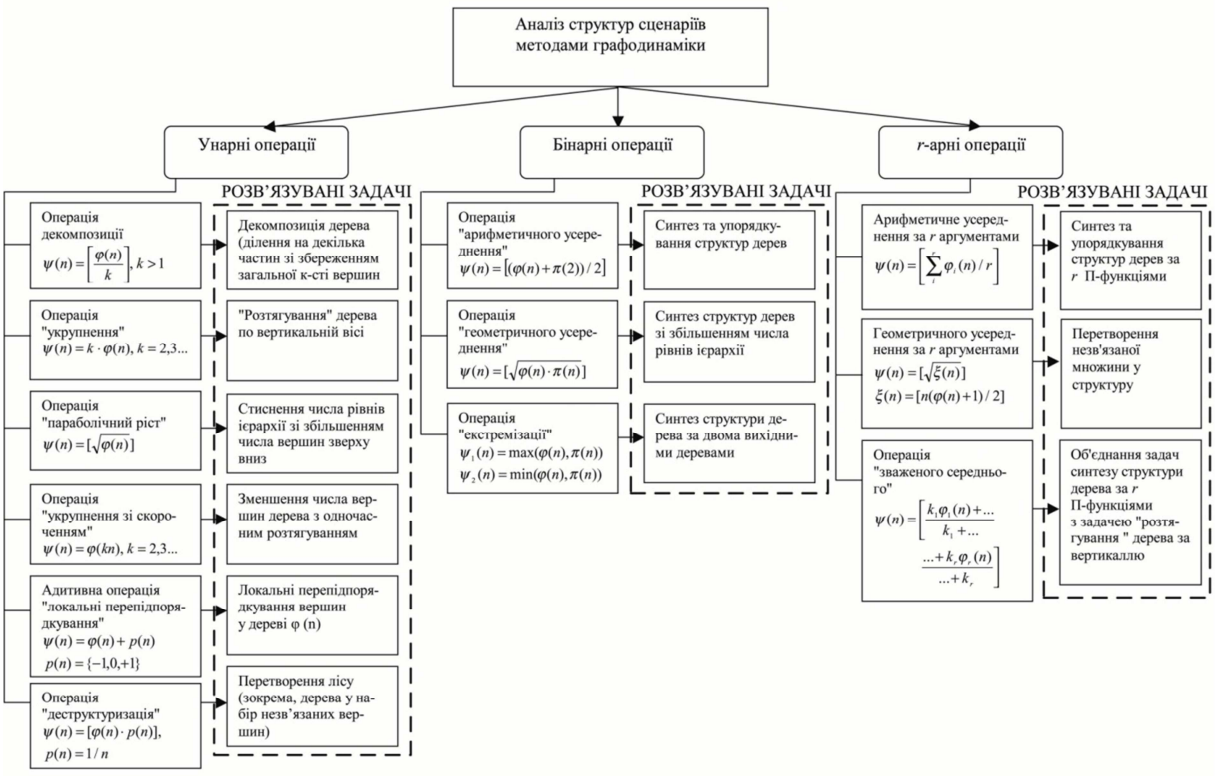



**Рис. 6.** Систематизація операцій та задач графодинаміки

Операція (6) перебудовує з них бінарне дерево (рис. 5, б) за допомогою наступних ітерацій (при $k = 2$ та $n = 10$):

$n = 1$: $\varphi(n) = 0$; $\pi(n) = 0$; $\psi(n) = 0$ (вершина 1 є кореневою);

$n = 2$: $\varphi(n) = 1$; $\pi(n) = 1$; $\psi(n) = 1 \Rightarrow (2 < 1)$;

$n = 3$: $\varphi(n) = 2$; $\pi(n) = 1$; $\psi(n) = [3/2] = 1 \Rightarrow (3 < 1)$;

$n = 4:\ \varphi(n) = 3;\ \pi(n) = 1;\ \psi(n) = 2 \Rightarrow (2 < 4);$

$n = 5:\ \varphi(n) = 4;\ \pi(n) = 1;\ \psi(n) = [5/2] = 2 \Rightarrow (2 < 5);$

$n = 6:\ \varphi(n) = 5;\ \pi(n) = 1;\ \psi(n) = 3 \Rightarrow (6 < 3);$

$n = 7:\ \varphi(n) = 6;\ \pi(n) = 1;\ \psi(n) = [7/2] = 3 \Rightarrow (7 < 3);$

$n = 8:\ \varphi(n) = 7;\ \pi(n) = 1;\ \psi(n) = 4 \Rightarrow (8 < 4);$

$n = 9:\ \varphi(n) = 8;\ \pi(n) = 1;\ \psi(n) = [9/2] = 4 \Rightarrow (9 < 4);$

$n = 10:\ \varphi(n) = 9;\ \pi(n) = 1;\ \psi(n) = 5 \Rightarrow (10 < 5).$

Виконаний аналіз основних положень теорії графодинаміки, дозволив запропонувати систематизовану структуру, що відображає основні види операцій та відповідні їм задачі (рис. 6). Це дозволить моделювати графові траєкторії, що характеризують динамічні зміни ієрархічних структур.

**Висновки**

У статті розглянуто основні положення теорії графодинаміки, які дозволяють зробити висновок про те, що її математичний апарат може бути успішно використаний для аналізу та моделювання динамічних процесів, що відбуваються в структурах ієрархічного типу. Наведені приклади ряду графодинамічних операцій дозволяють інтерпретувати їх дії на задачі моделювання структур комп'ютерних систем і мереж, сценарно-цільового планування та прогнозування, а також ряду інших задач.

## *ЛІТЕРАТУРА*


1. Айзерман М. А. Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики). I / М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, С. В. Петров, И. М. Смирнов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 7. – С. 135–151.
2. Айзерман М. А. Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики). II / / М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, С. В. Петров, И. М. Смирнов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 9. – С. 123–136.
3. Затуливетер Ю. С. Графодинамические системы с сетевым управлением в математически однородном поле компьютерной информации / Ю. С. Затуливетер, Е. А. Фищенко // Проблемы управления. – 2003. – № 4. – С. 1–26.
4. Снитюк В. Е. Прогнозирование. Модели. Методы. Алгоритмы. – К. : Маклаут, 2008. – 364 с.
5. Тененбаум Л. А. Исследование одного класса графодинамических систем / Л. А. Тененбаум // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 18. – С. 153–172.
6. Харрари Ф. Теория графов. – М. : Мир, 1973. – 300 с.


Рецензенти: Казарєзов А. Я., д.т.н., професор;
Фісун М. Т., д.т.н., професор

© Коваленко І. І., Передерій В. І., Швед А. В., 2010 *Стаття надійшла до редколегії 12.11.2010 р.*