УДК 519.816

Недашковская Н. И.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПО МНОГИМ КРИТЕРИЯМ ПРИ НЕПОЛНЫХ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНКАХ НА БАЗЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ (МАИ) И ТЕОРИИ ДЕМПСТЕРА-ШАФЕРА

В работе проведена формализация и предложены методы ранжировки альтернатив в интегрированном методе ДШ/МАИ, который объединяет метод МАИ и теорию доверия Демпстера-Шафера. Метод ДШ/МАИ предназначен для развязания задач поддержки принятия решений в условиях неполноты, неточности и неопределенности экспертной информации. Предложенные методы проиллюстрированы на модельной задаче.

Ключевые слова: *метод аналізу ієрархій, теорія Демстера-Шефера, прийняття рішень.*

В роботі проведена формалізація і запропоновано методи ранжування альтернатив у інтегрованому методі ДШ/МАІ, який об'єднує метод МАІ і теорію довіри Демпстера-Шафера. Метод ДШ/МАІ призначений для розв'язання задач підтримки прийняття рішень в умовах неповноти, неточності і невизначеності експертної інформації. Запропоновані методи проілюстровані на модельній задачі.

Ключові слова: *метод анализа иерархий, теория Демстера-Шефера, принятие решений.*

The formalization of the DS/AHP method is done and methods of ranking of decision alternatives are proposed. The DS/AHP method integrates the Analytic Hierarchy Process method and the evidence theory of Dempster and Shafer to solve decision-making problems when expert judgments are incomplete and partial. An example is used to describe the proposed ranking methods.

Key words: *Analytic Hierarchy Process method, the Dempster-Shafer theory, decision-making problems.*

Введение

В последние десятилетия метод анализа иерархий (МАИ) решения многокритериальных задач принятия решений (МКПР) на основе экспертных оценок [1; 2] разносторонне модифицируется и находит широкое применение в различных предметных сферах. Одна из модификаций – это метод ДШ/МАИ [3-7], объединяющий метод МАИ и теорию доверия Демпстера-Шафера [8], что позволяет осуществлять МКПР в условиях неполноты, неточности и неопределенности экспертной информации.

При решении практических задач лицо, принимающее решение, не всегда, в соответствии с методологией МАИ, имеет возможность выполнить парные сравнения между *всеми* альтернативами решений, что является необходимым условием для применения МАИ и практически всех его модификаций. При решении задач МКПР информация об альтернативах решений может быть неполной вследствие временных ограничений, неточности экспертных знаний, нематериального характера некоторых критериев и др. Большинство исследователей [9-11] решает задачу МКПР с неполной информацией, используя следующую двух-шаговую процедуру. На первом шаге формируется задача МКПР с полной информацией путем дополнения отсутствующих значений матрицы решений, используя механизм обучения [9; 10] или эвристические правила [11]. На втором шаге применяются стандартные методы МКПР для решения задачи с полной информацией. В отличие от этой двух-шаговой процедуры метод ДШ/МАИ позволяет решать задачу МКПР непосредственно, основываясь на неполных экспертных оценках альтернатив по критериям.

Результат метода ДШ/МАИ – это доверительные интервалы для групп альтернатив решений. А поскольку во многих практических задачах поддержки принятия решений требуется упорядочить (ранжировать) альтернативы, то необходимы специальные методы ранжирования интервалов. В данной работе приведена формализация метода ДШ/МАИ и предложены методы ранжирования альтернатив решений.

Основные понятия теории доверия Демпстера-Шафера

Приведем основные понятия теории доверия Демпстера-Шафера (ТДШ) [8], используемые для формализации метода ДШ/МАИ. Полное множество взаимоисключающих событий названо *фреймом различения* Θ. Возможными гипотезами в ТДШ являются все возможные подмножества Θ, их количество $|2^{\Theta}|$.

Базовым распределением доверия называется функция $m : 2^{\Theta} \to [0, 1]$, удовлетворяющая двум аксиомам:

1) доверие к пустому множеству равно нулю: $m(\varnothing)=0$;

2) сумма доверий для всех подмножеств фрейма Θ равна единице: $\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$.

Величина $m(A)$ показывает долю или порцию доверия к гипотезе $A \subseteq \Theta$.

Полным доверием называется функция $Bel : 2 \to [0, 1]$, которая удовлетворяет аксиомам:

1) доверие к пустому множеству равно нулю: $Bel(\varnothing) = 0$;

2)доверие к фрейму Θ равно единице: $Bel(\Theta) = 1$;

3) $Bel(A) + Bel(\neg A) \leq 1$.

Величина $Bel(A)$ вычисляется как сумма доверий по всем подмножествам A: $Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ и поэтому показывает полное доверие к $A \subseteq \Theta$.

Символ «$\neg A$» в приведенном выше определении полного доверия означает «не А», а величина доверия $Bel(\neg A)$ показывает уровень сомнения в гипотезе A и вычисляется по формуле: $Bel(\neg A) = \sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ A \cap B = \varnothing}} m(B)$.

Правдоподобием называется функция $Pls : 2^{\Theta} \to [0, 1]$, где $Pls(A)$ показывает величину максимального значения доверия, которое может быть по возможности назначено $A \subseteq \Theta$: $Pls(A) = 1 - Bel(\neg A)$.

Функции $Bel(A)$ и $Pls(A)$ интерпретируются как нижние и верхние вероятности появления гипотезы A в том смысле, что предполагается существование некоторой истинной вероятности $p(A)$ появления гипотезы A, такой что $Bel(A) \leq p(A) \leq Pls(A)$. Интервал $[Bel(A), Pls(A)]$ называется *доверительным интервалом*.

Следующие два неравенства $Bel(A) + Bel(\neg A) \leq 1$ и $Pls(A) + Pls(\neg A) \geq 1$, $A \subseteq \Theta$, которые являются следствием введенных выше определений, показывают главное отличие ТДШ от традиционного байесовского подхода, в котором вероятность $p(A)$ события A удовлетворяет условию $p(A) + p(\neg A) = 1$. В случае, когда каждое подмножество A состоит только из одного элемента, получим $Bel(A) = Pls(A) = m(A)$, следовательно, в этом случае выполняется $Bel(A) + Bel(\neg A) = 1$. Поэтому ТДШ можно рассматривать как обобщение байесовской теории вероятности.

Для *агрегирования* независимых доверий относительно одних и тех же гипотез используется правило Демпстера, согласно которому агрегированные доверия к гипотезам находятся посредством вычисления ортогональных сумм:

$$m_1 \oplus m_2(A) = \frac{1}{K} \sum_{X \cap Y = A} m_1(X) m_2(Y), \tag{1}$$

где $K = \sum_{X \cap Y \neq \varnothing} m_1(X) m_2(Y) = 1 - \sum_{X \cap Y = \varnothing} m_1(X) m_2(Y)$ – нормировочная константа, которая интерпретируется как мера конфликта при агрегировании доверий m_1 и m_2.

Используя свойство ассоциативности правила Демпстера (1),

$$(m_1 \oplus m_2) \oplus m_3 = m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3)$$

осуществляется агрегирование трех и более независимых доверий.

Формализация метода ДШ/МАИ

Рассмотрим постановку задачи нахождения доверительных интервалов для альтернатив решений и ранжирования альтернатив по множеству критериев в соответствии с методом ДШ/МАИ, объединяющем метод анализа иерархий и теорию доверия Демпстера – Шафера. Под ранжированием будем понимать упорядочение альтернатив в порядке убывания доверий к ним.

Дано:

– $A = \{A_i \mid i = 1, ..., n\}$ – множество альтернатив решений;
– $C = \{C_j \mid j = 1, ..., q\}$ – множество критериев решений.

Требуется найти:

– значения доверий к альтернативам;
– доверительные интервалы для альтернатив;
– ранжирование альтернатив.

В методе ДШ/МАИ каждая группа альтернатив решений сравнивается с фреймом различения (все множество альтернатив) по каждому из критериев и эксперт выражает степень «благоприятного знания» для каждой из этих групп альтернатив [3; 4]. Приведенное является принципиальным отличием от метода МАИ, в котором парные сравнения проводятся между отдельными альтернативами. Количество групп альтернатив отображает количество знаний, которыми обладает эксперт по данному критерию. К альтернативам, находящимся в одной группе, полагается (имеет место) одинаковое доверие, т. е. эксперт

не обладает достаточными знаниями для их различения. Кроме того, для агрегирования весов альтернатив по множеству критериев в методе ДШ/МАИ используется правило Демпстера вместо дистрибутивного и идеального методов, применяемых в МАИ.

Метод ДШ/МАИ состоит из нескольких этапов [3; 4]:

1) определение множества альтернатив и критериев решений;

2) нахождение точечных весов критериев по методу собственного вектора МАИ;

3) формирование групп альтернатив относительно критериев, при этом к альтернативам, находящимся в одной группе, имеется одинаковое доверие;

4) проведение парных сравнений сформированных групп альтернатив с фреймом различения (всем множеством альтернатив) по каждому из критериев;

5) нахождение значений функций базового распределения доверия $m_j(\cdot)$для групп альтернатив и фрейма по каждому из критериев $j = 1, ..., q$ методом главного собственного вектора;

6) агрегирование полученных в п. 5 функций базового распределения доверия, используя правило Демпстера;

7) расчет значений полного доверия $Bel(\cdot)$ и правдоподобия $Pls(\cdot)$, построение доверительных интервалов для групп альтернатив.

Проведем формализацию четвертого и пятого этапов. В соответствии с методом ДШ/МАИ каждая группа альтернатив решений сравнивается только с фреймом различения, поэтому матрица парных сравнений (МПП) будет иметь следующую структуру:

$$D_{r+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & d_1 w^c \\ 0 & 1 & ... & 0 & d_2 w^c \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & 1 & d_r w^c \\ 1/(d_1 w^c) & 1/(d_2 w^c) & ... & 1/(d_r w^c) & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

где $d_i = d_{i\Theta}$ – количественное выражение степени преобладания группы альтернатив S_i над фреймом Θ, r – количество групп альтернатив по рассматриваемому критерию, w^c – вес критерия. Записывая нули в соответствующие позиции МПП (2) полагаем, что парные сравнения не производятся между различными группами альтернатив.

Значения функции базового распределения доверия $m_j(\cdot)$для групп альтернатив и фрейма вычисляются как элементы собственного вектора МПП (2), отвечающего наибольшему собственному числу этой матрицы. Используя уравнения

$$\det(D_{r+1} - \lambda I_{r+1}) = 0;$$

$$D_{r+1} w = \lambda_{\max} w;$$

$$\sum_{i=1}^{r+1} w_i = 1 \text{ (условие нормировки)},$$

нетрудно доказать следующие утверждения.

Утв. 1. Наибольшее собственное число МПП (2) равно

$$\lambda_{\max} = 1 + \sqrt{r}.$$

Утв. 2. Элементы нормированного главного собственного вектора МПП (2), соответствующие ее наибольшему собственному числу $\lambda_{\max}$, равны

$$w_i = \frac{d_i w^c}{\sum_{j=1}^{r} d_j w^c + \sqrt{r}}, \; i = 1, 2, ..., r; \quad w_{r+1} = \frac{\sqrt{r}}{\sum_{j=1}^{r} d_j w^c + \sqrt{r}}. \tag{3}$$

Величины w_i, $i = 1, 2, r + 1$, вычисленные по формулам (3), являются значениями функции базового распределения доверия по критерию:

$$m(S_i) = w_i, \; i = 1, 2, ..., r,$$
$$m(\Theta) = w_{r+1}.$$

Мерой неполноты экспертной информации по критерию назовем величину $m(\Theta)$ базового доверия к фрейму по рассматриваемому критерию.

Мерой неполноты экспертной информации по множеству критериев $C = \{C_j \mid j = 1, ..., q\}$ назовем величину $(m_1 \oplus m_2 \oplus ... \oplus m_q)(\Theta)$ базового агрегированного доверия к фрейму.

В результате применения метода ДШ/МАИ каждой группе альтернатив S_i (альтернативе в частном случае) ставится в соответствие доверительный интервал $[Bel_i, Pls_i]$ (рис. 1).

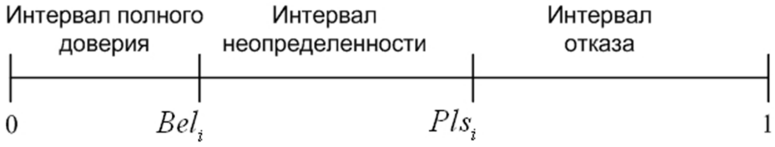

Рис. 1. Схема интерпретации доверительного интервала

Поскольку значение полного доверия Bel_i показывает «точное» доверие к группе S_i, в отличии от значения правдоподобия Pls_i, которое, в свою очередь показывает величину максимального доверия, которое может быть по возможности назначено S_i, в данной работе предлагается следующие два метода ранжирования групп альтернатив:

1) ранжирование в соответствии с убыванием точечных значений Bel_i полных агрегированных доверий к группам альтернатив;

2) ранжирование, полученное при сравнении доверительных интервалов $[Bel_i, Pls_i]$.

Метод ранжирования групп альтернатив по их доверительным интервалам

Пусть $[Bel_i, Pls_i]$ и $[Bel_j, Pls_j]$ – доверительные интервалы групп альтернатив S_i и S_j соответственно. Введем понятие *степени нестрогого преобладания* интервала для S_i над интервалом для S_j: $p(S_i \geq S_j) \in [0, 1]$. Вычисление значений $p(S_i \geq S_j)$ будем осуществлять на основе следующих аксиом:

1) $p(S_i \geq S_j) = 1$, если $Pls_j \leq Bel_i$ (рис. 2а),

2) $p(S_i \geq S_j) = 0$, если $Pls_j < Bel_i$ (рис. 2б),

3) $p(S_i \geq S_j) = \dfrac{Pls_i - Bel_j}{(Pls_i - Bel_i) + (Pls_j - Bel_j)}$, если $(Pls_j > Bel_i) \wedge (Pls_i \geq Bel_j)$ (рис. 2в, г).

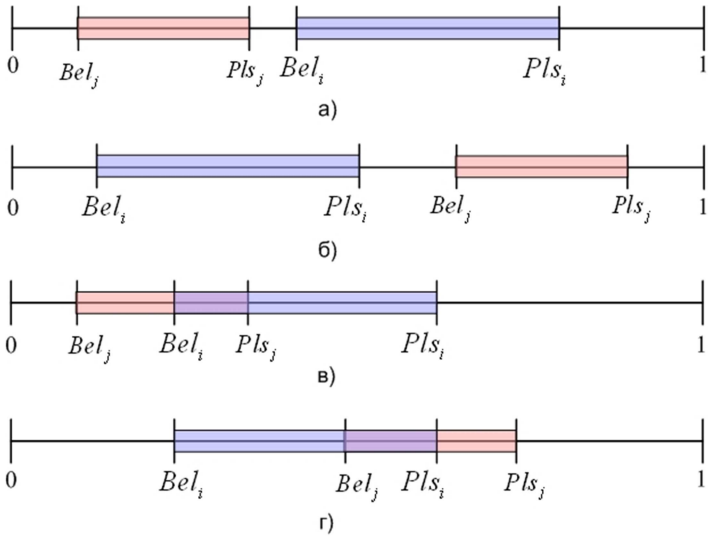

Рис. 2. Взаимные размещения интервалов
для разных значений степени нестрогого преобладания

Матрица степеней нестрогого преобладания $P = \{(p_{ij} = p(S_i \geq S_j)) \mid i, j = 1, ..., n\}$, где n – количество групп альтернатив, которые необходимо ранжировать, имеет следующие свойства: $p_{ij} \in [0, 1]$, $p_{ij} + p_{ji} = 1$, $p_{ii} = 1/2$.

В соответствии с введенными p_{ij}, метод ранжирования состоит в следующем:

1. Вычисление суммы степеней преобладания S_i над всеми остальными группами альтернатив: $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$.

2. Ранжирование групп альтернатив в соответствии с убыванием значений p_i.

Пример

Рассмотрим модельную задачу оценивания моделей альянсов между банками и страховыми компаниями в соответствии с двумя группами критериев: финансовые (C_1) и риски (C_2) [12]. К финансовым, например, были отнесены такие критерии как необходимый кредитный капитал, инвестиционные возможности, управление продажами, управление связями с клиентами, соотношение доходы-затраты, логика прибыли, источники конфликтов, экономии вследствие роста масштабов производства и портфеля услуг. Выполним ранжирование десяти альтернативных моделей альянсов M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8, M9, M10, используя оценки эксперта по указанным двум группам критериев (далее – критериям) (табл. 1).

Таблица 1

Результаты оценивания экспертом групп альтернатив

а) по критерию C_1:

Результаты сравнений

C_1	$S_{11} = \{M5, M7\}$	$S_{12} = \{M1, M8\}$	$S_{13} = \{M3, M4, M9\}$	$S_{14} = \{M2\}$
Θ	1	5	2	3

б) по критерию C_2:

Результаты сравнений

C_2	$S_{21} = \{M6, M8\}$	$S_{22} = \{M1, M9, M10\}$	$S_{22} = \{M2, M5, M7\}$
Θ	4	2	3

Приведенные в табл. 1 экспертные оценки доверий к каждой группе, выполнены в 7-ми точечной шкале 1-7, где крайние значения шкалы означают соответственно «очень слабое доверие» и «абсолютное доверие».

В соответствии с методом ДШ/МАИ по формулам (3) для каждого критерия вычисляются значения базового распределения доверия. Например, для критерия C_1 с весом w_1^c =0,6 эти значения равны: $m_1(s_{11})$ = 0,072, $m_1(s_{12})$ = 0,360, $m_1(s_{13})$ = 0,144, $m_1(s_{14})$ = 0,216, $m_1(\Theta)$ = 0,208. Следующий этап – агрегирование $m_{aggr} = m_1 \oplus m_2$ доверий по критериям по правилу Демпстера (1). Затем вычисляются значения полных доверий и правдоподобий.

Доверительные интервалы групп альтернатив в данном примере равны:

$\{M1\}$: [0,083, 0,359], $\{M2\}$: [0,163, 0,319], $\{M8\}$: [0,165, 0,489], $\{M9\}$: [0,033, 0,224], $\{M1, M8\}$: [0,393, 0,572], $\{M5, M7\}$: [0,053, 0,209], $\{M6, M8\}$: [0,260, 0,489], $\{M1, M9, M10\}$: [0,163, 0,452], $\{M2, M5, M7\}$: [0,288, 0,372], $\{M3, M4, M9\}$: [0,093, 0,224]. Вычислим матрицу $P = \{(p_{ij} = p(S_i \geq S_j)) \mid i, j = 1, ..., n\}$, $n = 10$ степеней нестрогого преобладания для этих групп альтернатив и найдем ранжирование, оно будет следующим:

$\{M8\} > \{M2\} > \{M1\} > \{M9\}$,

$\{M1, M8\} > \{M6, M8\} > \{M5, M7\}$,

$\{M2, M5, M7\} > \{M1, M9, M10\} > \{M3, M4, M9\}$.

Отметим, что значение базового агрегированного доверия, равное $m_{aggr}(\Theta)$ = 0,085 в соответствии с определением, введенным в п. 3, является мерой неполноты экспертной информации по множеству критериев. Таким образом, уровень неопределенности данной задачи принятия решений составляет 8,5 %.

Заключение

В работе проведена формализация и предложены методы ранжирования альтернатив в интегрированном методе ДШ/МАИ, который объединяет метод МАИ и теорию доверия Демпстера-Шафера, позволяя осуществлять поддержку принятия решений в условиях неполноты, неточности и неопределенности экспертной информации. Предложенные методы проиллюстрированы на модельной задаче оценивания моделей альянсов между банками и страховыми компаниями. Направлениями дальнейших исследований может быть оценивание чувствительности метода ДШ/МАИ к изменениям во множестве альтернатив решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Saaty Thomas L. Theory of the Analytic Hierarchy Process // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – Part 2.1. – № 1. – С. 48–72.
2. Saaty T. L. Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary // European Journal of Operational Research. – 145(1). – P. 85–91.
3. Beynon M. J. The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling / M. J. Beynon, B. Curry, P. H. Morgan // Omega. – 2000. – 28 (1). – P. 37–50.
4. Beynon M. J. DS/AHP method: A mathematical analysis, including an understanding of uncertainty // European Journal of Operational Research. – 2002. – 140. – P. 148–164.
5. Beynon M. J.. A method of aggregation in DS/AHP for group decision-making with the non-equivalent importance of individuals in the group // Computers & Operations Research. – 2005a. – 32. – P. 1881–1896.
6. Beynon M. J. Understanding local ignorance and non-specificity within the DS/AHP method of multi-criteria decision making // European Journal of Operational Research. – 2005b. – 163. – P. 403–417.
7. Beynon, M. J. The Role of the DS/AHP in Identifying Inter-Group Alliances and Majority Rule Within Group Decision Making // Group Decision and Negotiation. – 2006. – 15. – P. 21–42.
8. Dempster, A. P. A generalization of Bayesian inference (with discussion) // Journal of the Royal Statistical Society Series B. – 1968. – 30. – P. 205–247.
9. Fortes I. Inductive learning models with missing values / I. Fortes, L. Mora-L'opez, R. Morales, F. Triguero // Mathematical and Computer Modelling. – 2006. – 44. – P. 790–806.
10. Hong T. P. Learning rules from incomplete training examples by rough sets / T. P. Hong, L. H. Tseng, S. L. Wang // Expert Systems with Applications. – 2002. – 22. – P. 285–293.
11. Quinten A. Effectiveness of different missing data treatments in surveys with Likert-type data: Introducing the relative mean substitution approach / A. Quinten, W. Raaijmakers // Educational and Psychological Measurement. – 1999. – 59(5). – P. 725–748.
12. Pekka Korhonen. Finding the most preferred alliance structure between banks and insurance companies / Pekka Korhonen, Raimo Voutilainen // European Journal of Operational Research. – 2006. – 175 (2006). – P. 1285–1299.

Рецензенти: Фісун М. Т., д.т.н., професор;
Кондратенко Ю. П., д.т.н., професор

© Недашковська Н. І., 2010

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2010 р.