УДК 517.95

Лагно В.І., Стогній В.І.

ПОБУДОВА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ У РЕЛЯТИВІСТСЬКІЙ ФІЗИЦІ

Отримано всі нееквівалентні реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре P(1,1) та P(1,2) в класі векторних полів Лі в просторах двох і трьох незалежних та однієї залежної змінних. Також побудовано нові диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку в дво- та тривимірному просторі-часі, інваріантні відносно груп Пуанкаре P(1,1), P(1,2).

Ключові слова: *Група Пуанкаре, алгебра Лі, реалізація групи, інваріантне рівняння.*

Получены все неэквивалентные реализации алгебр Ли групп Пуанкаре P(1,1) и P(1,2) в классе векторных полей Ли в пространствах двух и трех независимых и одной зависимой переменных. Также получены новые дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка в двух- и трехмерном пространстве-времени, инвариантные относительно групп Пуанкаре P(1,1), P(1,2).

Ключевые слова: *Группа Пуанкаре, алгебра Ли, реализация группы, инвариантное уравнение.*

We have constructed all inequivalent realizations of the Lie algebras of the Poincare groups P(1,1) and P(1,2) by Lie vector fields in spaces of two and three independent and one dependent variables. We have also obtained new second-order partial differential equations in two- and three-dimensional space-time invariant under the groups P(1,1) and P(1,2).

Key words: *Poincare group, Lie algebra, realization of the group, invariant equation.*

ВСТУП

Однією із важливих задач сучасного групового аналізу диференціальних рівнянь, на якій ми тут зупиняємося, є задача побудови найбільш загального диференціального рівняння з частинними похідними, яке допускає в якості групи інваріантності деяку відому групу локальних перетворень. Добре відомо (див., наприклад, [1; 2]), що найбільш загальний розв’язок цієї задачі передбачає побудову повної множини диференціальних інваріантів певного порядку для даної групи локальних перетворень. Знаючи множину диференціальних інваріантів такої групи, можна визначити структуру всіх диференціальних рівнянь, які допускають цю групу в якості групи інваріантності. В роботах [3-5] було знайдено повну множину диференціальних інваріантів другого порядку для відомих реалізацій (зображень) алгебр Лі груп Евкліда, Пуанкаре та Галілея в класі лінійних диференціальних операторів першого порядку (або, що те саме, в класі векторних полів Лі цих груп).

Очевидним є те, що повне розв’язання вказаної задачі для деякої групи локальних перетворень передбачає наявність повного переліку реалізацій алгебри Лі цієї групи в класі векторних полів Лі. Тому в роботах [6; 7] для побудови найбільш загального вигляду хвильових і еволюційних рівнянь у двовимірному просторі-часі, які інваріантні відносно груп Пуанкаре та Галілея, попередньо було проведено опис реалізацій алгебр Лі цих груп в одному класі векторних полів Лі й отримано ряд нових, ще невідомих реалізацій цих алгебр.

Саме бажання отримати ще невідомі, у певному сенсі, нелінійні реалізації алгебр Лі важливих груп локальних перетворень і було спонукальним мотивом появи ряду робіт [8-11], в яких були побудовані нові реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре $P(1,2)$, $P(1,3)$ та Галілея $G(1,3)$,

$G(1,3)$. У зв'язку з цим природно виникає інтерес до розв'язування задачі повного опису реалізацій алгебр Лі найбільш важливих і відомих груп локальних перетворень в класі лінійних диференціальних операторів першого порядку, які у подальшому можуть розглядатися як алгебри інваріантності диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Метою даного повідомлення є отримання повного переліку реалізацій алгебр Лі груп Пуанкаре $P(1,1)$, $P(1,2)$ в класі векторних полів Лі, які у подальшому можуть розглядатися як алгебри інваріантності диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГЕБР ЛІ ГРУП $P(1,1)$, $\tilde{P}(1,1)$, $C(1,1)$ ТА ІНВАРІАНТНІ РІВНЯННЯ

У цій частині роботи ми досліджуємо реалізації алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,1)$ (у подальшому ми її називаємо алгеброю Пуанкаре $p(1,1)$) та її природних узагальнень (розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{p}(1,1)$, конформної алгебри $c(1,1)$) у просторі $\mathrm{V} = \mathrm{X} \otimes \mathrm{U}$ незалежних і залежної змінних. Тут X − двовимірний простір Мінковського з координатами t та x, U − простір скалярних функцій $u = u(t,x)$, а тому векторні поля Лі визначаються операторами вигляду

$$\mathrm{v} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u, \tag{1.1}$$

де $\tau = \tau(t,x,u)$, $\xi = \xi(t,x,u)$, $\eta = \eta(t,x,u)$ – довільні гладкі функції в деякій області простору V, $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ і т.д..

Зображення алгебри Пуанкаре $p(1,1)$ та її природних узагальнень з базисними операторами вигляду (1.1) реалізуються на множині розв'язків багатьох відомих двовимірних рівняннях з частинними похідними релятивістської фізики (наприклад, рівняння Клейна-Гордона, Ліувілля, sin- д'Аламбера, ейконала).

Будемо говорити, що оператори P_μ, K, D, C_μ ($\mu = 0,1$) вигляду (1.1) реалізують зображення конформної алгебри $c(1,1)$ якщо

- вони є лінійно незалежними;
- вони задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{gathered}
[P_0,K]=P_1,\ [P_1,K]=P_0,\ [P_\mu,D]=P_\mu,\ [C_0,K]=C_1,\ [C_1,K]=C_0,\ [C_\mu,D]=-C_\mu,\\
[P_\mu,C_\nu]=2(g_{\mu\nu}D-\varepsilon_{\mu\nu}K),\ [K,D]=[P_0,P_1]=[C_0,C_1]=0,\\
g_{00}=-g_{11}=1,\ g_{01}=g_{10}=0,\ \varepsilon_{01}=-\varepsilon_{10}=1,\ \varepsilon_{00}=-\varepsilon_{11}=0,\ \mu,\nu=0,1.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

У наведених вище формулах $[\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2] \equiv \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_2\mathrm{v}_1$ є комутатором. Підалгебра алгебри $c(1,1)$ з базисними операторами P_0, P_1, K є алгеброю Пуанкаре $p(1,1)$, а з базисними операторами P_0, P_1, K, D – розширеною алгеброю Пуанкаре $\tilde{p}(1,1)$.

Добре відомо (див., наприклад, [1; 2]), що співвідношення (1.2) не зміняться в результаті виконання довільного невиродженого зворотного перетворення незалежних і залежної змінних в базисних операторах реалізації,

$$t \to \bar{t} = f(t,x,u), x \to \bar{x} = q(t,x,u), u \to \bar{u} = h(t,x,u), \tag{1.3}$$

де f, g, h – довільні гладкі функції. Зворотні перетворення вигляду (2.3) складають групу (групу дифеоморфізмів), яка визначає природне відношення еквівалентності на множині всіх можливих реалізацій алгебри $c(1,1)$: дві реалізації конформної алгебри називаються еквівалентними, якщо їх відповідні базисні оператори можуть бути трансформованими один в інший заміною змінних (1.3). Тому опис всіх можливих реалізацій алгебри $c(1,1)$ ми проводимо з точністю до такої еквівалентності.

В роботі [6] було отримано нееквівалентні реалізації алгебр $p(1,1), \mathfrak{b}(1,1), c(1,1)$ в припущенні, що оператори P_0, P_1 замінами змінних (3) зводяться до вигляду

$$P_0 = \partial_t, P_1 = \partial_x. \tag{1.4}$$

Класифікаційний результат [6] міститься у наступному переліку:

1. Нееквівалентні реалізації алгебри $p(1,1)$

$$\begin{aligned} &p^1(1,1):\{P_0 = \partial_t, P_1 = \partial_x, K = x\partial_t + t\partial_x\}, \\ &p^2(1,1):\{P_0 = \partial_t, P_1 = \partial_x, K = x\partial_t + t\partial_x + u\partial_u\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Нееквівалентні реалізації алгебри $\mathfrak{b}(1,1)$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{b}^1(1,1):\{\{p^1(1,1)\}, D = t\partial_t + x\partial_x\}, \\ &\mathfrak{b}^2(1,1):\{\{p^1(1,1)\}, D = t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u\}, \\ &\mathfrak{b}^3(1,1):\{\{p^2(1,1)\}, D = (t + au + bu^{-1})\partial_t + (x + au - bu^{-1})\partial_x + \lambda u\partial_u\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

де $\lambda \in R, (a,b) = (0,0)$, або $\lambda = 1, (a,b) = (1,0)$, або $\lambda = -1, (a,b) = (0,1)$.

3. Нееквівалентні реалізації алгебри $c(1,1)$

$$\begin{aligned} &c^1(1,1):\{\{\mathfrak{b}^1(1,1)\}, C_0 = (t^2 + x^2)\partial_t + 2tx\partial_x, C_1 = -(t^2 + x^2)\partial_x - 2tx\partial_t\}, \\ &c^2(1,1):\{\{\mathfrak{b}^2(1,1)\}, C_0 = (t^2 + x^2 + au^2)\partial_t + 2tx\partial_x + 2tu\partial_u, \\ &\qquad C_1 = -(t^2 + x^2 + au^2)\partial_x - 2t\partial_t - 2xu\partial_u,\}, \text{ де } a = 0,1,-1, \\ &c^3(1,1):\{\{\mathfrak{b}^3(1,1), \lambda \in R, a = b = 0\}, C_0 = (t^2 + x^2 + cu^2 + du^{-2})\partial_t + (2tx + cu^2 - du^{-2})\partial_x + \\ &+ (2u(x + \lambda t) + eu^2 + k)\partial_u, \quad C_1 = -[K, C_0], \end{aligned} \tag{1.7}$$

де, якщо $\lambda \in R, \lambda \neq \pm 1$, то $c = d = e = k = 0$; якщо $\lambda = 1$, то $d = k = 0, c = \pm 1, e \in R$ або $c = 0, e = 0, \pm 1$; якщо $\lambda = -1$, то $c = e = 0, d = \pm 1, k \in R$ або $d = 0, k = 0,1\}$.

Взагалі кажучи, базисні елементи P_0, P_1 не завжди зводяться до вигляду (1.4). Тому всеможливі нееквівалентні реалізації алгебр $p(1,1)$, $\mathfrak{b}(1,1)$ не вичерпуються реалізаціями (1.5) – (1.7). Як буде показано нижче, існує ще одна реалізація алгебри $p(1,1)$ та дві реалізації алгебри $\mathfrak{b}(1,1)$.

Лема 2.1. Нехай P_0, P_1 є лінійно незалежними операторами вигляду (1.1). Тоді існують перетворення (2.3), які зводять ці оператори до вигляду (4) та ще до таких двох операторів:

$$P_0 = \partial_t, P_1 = x\partial_t. \tag{1.8}$$

Доведення. Нехай $\boldsymbol{M}$ є (2×3)-матрицею, яка утворена коефіцієнтами операторів P_0, P_1.

Випадок 1. *rank* $\boldsymbol{M}$*=2.* Добре відомо (див., наприклад, [1]), що кожен ненульовий оператор *v* вигляду (1.1) замінами змінних (1.3) може бути зведеним до оператора $\overline{v} = \partial_{\overline{t}}$.

Тому, не зменшуючи загальності міркувань, можемо у подальшому покласти $P_0 = \partial_t$. Оскільки $[P_0, P_1] = 0$, то $P_1 = \tau(x,u)\partial_t + \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u$.

Згідно з припущенням, один із коефіцієнтів ξ або η є відмінним від нуля. Вважаємо, що $\xi \neq 0$ (якщо це не так, то використовуємо заміну змінних $x \to u, u \to x$). Скориставшись

перетвореннями $\bar{t} = t + f(x,u), \bar{x} = g(x,u), \bar{u} = h(x,u)$, де функції f, g, h є розв'язками системи рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$P_1 f + \tau = 0, \quad P_1 \xi = 1, \quad P_1 h = 0,$$

ми зводимо оператори P_0, P_1 до вигляду $P_0 = \partial_{\bar{t}}, P_1 = \partial_{\bar{x}}$, що є еквівалентним випадкові (1.4).

Випадок 2. *rank* ***M****=1*. Застосувавши перетворення (2.3), зводимо оператор P_0 до вигляду $P_0 = \partial_t$. Тоді $P_1 = \tau(x,u)\partial_t$, й оскільки $\tau \neq 0$, заміна змінних

$$\bar{t} = t, \bar{x} = \tau(x,u), \quad \bar{u} = h(x,u), \quad \frac{D(\tau,h)}{D(x,u)} \neq 0,$$

зводить оператори P_0, P_1 до вигляду (2.8). Лему доведено.

Теорема 2.1. Нееквівалентні реалізації алгебри $p(1,1)$ вичерпуються реалізаціями (5) та реалізацією

$$p^3(1,1) : \left\{ P_0 = \partial_t, P_1 = x\partial_t, K = xt\partial_t + \left(x^2 - 1\right)\partial_x \right\}. \tag{1.9}$$

Доведення. Всі нееквівалентні реалізації двовимірної абелевої алгебри з базисними операторами P_0, P_1 вичерпуються реалізаціями (2.4) та (2.8). Випадок реалізації (1.4) проаналізовано в [6]. Нехай оператори P_0, P_1 мають вигляд (2.8), а оператор *K* – вигляд (1.1). З виконання комутаційних співвідношень $[P_0, K] = P_1, \quad [P_1, K] = P_0$ випливає, що

$$K = \left[tx + \tau(x,u)\right]\partial_t + \left(x^2 - 1\right)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u.$$

Застосувавши заміну змінних

$$\bar{t} = t + f(x,u), \quad \bar{x} = x, \quad \bar{u} = h(x,u), \quad \frac{\partial h}{\partial u} \neq 0,$$

де функції f, h є розв'язками рівнянь з частинними похідними

$$Kf = xf - \tau, \quad Kh = 0,$$

зводимо оператори P_0, P_1, K до вигляду (2.9). Теорему доведено.

Теорема 2.2. Нееквівалентні реалізації алгебри $\beta_6^4(1,1)$ вичерпуються реалізаціями (1.6) та такими реалізаціями:

$$\begin{aligned} &\beta_6^4(1,1) : \left\{ \left\{ p^3(1,1) \right\}, D = t\partial_t \right\}, \\ &\beta_6^5(1,1) : \left\{ \left\{ p^3(1,1) \right\}, D = t\partial_t + u\partial_u \right\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Теорема 2.3. Нееквівалентні реалізації алгебри $c(1,1)$ вичерпуються реалізаціями (1.7).

Доведення теорем 2.2, 2.3 є аналогічним доведенню теореми 2.1. Зауважимо лише, що реалізації $\beta_6^4(1,1), \beta_6^5(1,1)$ не допускають розширення в класі операторів (1) до реалізацій конформної алгебри.

Використаємо тепер отримані реалізації для побудови найбільш загального вигляду відповідних інваріантних рівнянь. Процедура побудови таких рівнянь в класичному підході Лі є стандартною [1,2]. Нехай $\mathrm{v}_a, a = 1,\ldots, p,$ складають базис алгебри Лі у групи симетрії *G*, яка діє в просторі *V*. У нашому випадкові *V* є простором $\langle t, x, u \rangle$, а оператори v_a мають вигляд (2.1). Розглядаємо найбільш загальне рівняння другого порядку

$$\Phi\left(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{tx}\right) = 0, \tag{2.11}$$

де Φ – довільна функція своїх аргументів. Рівняння (2.11) буде інваріантним відносно групи *G*, якщо функція Φ задовольняє систему рівнянь

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathrm{v}_a \cdot \Phi = 0, \quad a = 1,\ldots, p. \tag{2.12}$$

Тут $\mathrm{pr}^{(2)}\mathrm{v}_a$ – другі продовження операторів v_a. Розв'язавши систему (2.12), ми отримаємо множину елементарних диференціальних інваріантів $J_k = I_k\left(x,t,u,u_\mu,u_{\mu\nu}\right),(\mu,\nu)=(t,x)$, $k=1,...,s$, а найбільш загальна форма *G*-інваріантного рівняння (2.11) матиме вигляд

$$F\left(I_1,...,I_s\right)=0. \tag{2.13}$$

Отже, щоб отримати найбільш загальний вигляд рівняння, інваріантного відносно групи G, потрібно знайти множину всіх елементарних диференціальних інваріантів даної групи.

Випадки $P(1,1)-, \tilde{P}(1,1)-$, та $C(1,1)-$інваріантних рівнянь для реалізацій (2.5)-(2.7) досліджені в $[6]$. Тому, для отримання повного опису рівнянь (2.11), які інваріантні відносно груп $P(1,1), \tilde{P}(1,1)$, нам залишається розглянути реалізації (2.9), (2.10). Оскільки кількість змінних у співвідношеннях (2.11), (2.12) дорівнює восьми, алгебри $p(1,1), \tilde{p}(1,1)$ є розв'язними, загальні орбіти продовжених груп є три- та чотиривимірними відповідно, для групи $P(1,1)$ існують п'ять, а для групи $\tilde{P}(1,1)$- чотири незалежних елементарних диференціальних інваріанти [12].

Результати обчислень наведемо в наступному перелікові:

1. Елементарні інваріанти алгебри $p^3(1,1)$ *:*

$$\begin{aligned} &I_1=u, I_2=u_t^2\left(x^2-1\right), I_3=u_{tt}\left(x^2-1\right),\\ &I_4=\left(x^2-1\right)^2\left(u_x u_{tt}-u_t u_{tx}\right)-x\left(x^2-1\right)u_t^2,\\ &I_5=\left(x^2-1\right)^3\left(u_{tt}u_{xx}-u_{tx}^2\right)+2x\left(x^2-1\right)^2\left(u_x u_{tt}-u_t u_{tx}\right)-x^2\left(x^2-1\right)u_t^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2. Елементарні інваріанти алгебри $\tilde{p}^4(1,1)$ *:*

$$\Sigma_1=I_1,\quad \Sigma_2=I_2^{-1}I_3,\quad \Sigma_3=I_2^{-2}I_4,\quad \Sigma_4=I_2^{-5}I_5. \tag{2.15}$$

де $I_1,...,I_5$ мають вигляд (2.14).

3. Елементарні інваріанти алгебри $\tilde{p}^5(1,1)$ *:*

$$\Sigma_1=I_1I_3,\quad \Sigma_2=I_2,\quad \Sigma_3=I_4,\quad \Sigma_4=I_5, \tag{2.16}$$

де $I_1,...,I_5$ мають вигляд (2.14).

3. РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГЕБРИ ЛІ ГРУПИ $p(1,2)$

Тут $V=X\otimes U$, де X – тривимірний простір Мінковського з координатами x_0, x_1, x_2, U – простір дійсних скалярних функцій $u(x)=u\left(x_0,x_1,x_2\right)$, векторні поля Лі мають вигляд

$$v=\xi^\mu(x,u)\partial_{x_\mu}+\eta(x,u)\partial_u, \tag{3.1}$$

де ξ^μ,η $(\mu=0,1,2)$ – дійсні гладкі функції, визначені в деякій області простору V.

Будемо говорити, що оператори $P_\mu, J_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2)$ вигляду (1) складають базис реалізації алгебри Лі $p(1,2)$ групи Пуанкаре $P(1,2)$, якщо

- вони лінійно незалежні;
- вони задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} &\left[P_\mu,J_{\alpha\beta}\right]=g_{\mu\alpha}P_\beta-g_{\mu\beta}P_\alpha,\quad \left[P_\mu,P_\nu\right]=0,\\ &\left[J_{\mu\nu},J_{\alpha\beta}\right]=g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha}+g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta}-g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta}-g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha},\quad \text{äå}\quad \mu,\nu,\alpha,\beta=0,1,2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0, \\ 0, & \mu \neq \nu, \\ -1, & \mu = \nu = 1,2. \end{cases}$$

Реалізації алгебри $p(1,2)$ в класі векторних полів (3.1) досліджуємо з точністю до еквівалентності, яку визначає дія групи дифеоморфізмів

$$x_\mu \to \overline{x}_\mu = f_\mu(x,u), \quad u \to \overline{u} = g(x,u), \tag{3.3}$$

де $f_\mu, g -$ довільні гладкі функції своїх аргументів у просторі V .

Оскільки, як це випливає зі співвідношень (3.2), $p(1,2) = o(1,2) \notin T$, де $o(1,2) = \langle J_{\mu\nu} \,|\, \mu,\nu = 0,1,2 \rangle$, $T = \langle P_\mu \,|\, \mu = 0,1,2 \rangle -$ комутативний ідеал, вивчення реалізацій алгебри $p(1,2)$ ми розпочинаємо з розгляду реалізацій операторів трансляцій $P_\mu \, (\mu = 0,1,2)$.

<u>Лема 3.1.</u> Існують перетворення (3.3), які зводять оператори $P_\mu \, (\mu = 0,1,2)$ до однієї із таких трійок операторів:

$$\begin{aligned}
&(a)\ P_0 = \partial_{x_0},\ P_1 = \partial_{x_1},\ P_2 = \partial_{x_2}; \\
&(b)\ P_0 = \partial_{x_0},\ P_1 = \partial_{x_1},\ P_2 = x_2\partial_{x_0} + u\partial_{x_1}; \\
&(c)\ P_0 = \partial_{x_0},\ P_1 = \partial_{x_1},\ P_2 = h(x_2)\partial_{x_0} + \varphi(x_2)\partial_{x_1}; \\
&(d)\ P_0 = \partial_{x_0},\ P_1 = x_1\partial_{x_0},\ P_2 = \partial_{x_2}; \\
&(e)\ P_0 = \partial_{x_0},\ P_1 = x_1\partial_{x_0},\ P_2 = \psi(x_1)\partial_{x_0}; \\
&(g)\ P_0 = \partial_{x_0},\ P_1 = x_1\partial_{x_0},\ P_2 = x_2\partial_{x_0};
\end{aligned} \tag{3.4}$$

де $\varphi, \psi, h -$ довільні гладкі функції своїх аргументів і, внаслідок лінійної незалежності операторів P_μ, $\dfrac{d\psi}{dx_1} \neq const$, $\dfrac{dh}{dx_2}$ та $\dfrac{d\varphi}{dx_2}$ одночасно не набувають сталих значень.

Доведення леми є аналогічним доведенню леми 2.1, тому тут ми на ньому не зупиняємося.

Далі для класифікації реалізацій алгебри $p(1,2)$ потрібно провести розширення ідеалу T до алгебри $p(1,2)$ операторами $J_{\mu\nu} \, (\mu\nu = 0,1,2)$ вигляду (3.1). Очевидно, що оскільки реалізації (3.4) ідеалу T є нееквівалентними між собою, то і відповідні їм реалізації алгебри $p(1,2)$ будуть теж нееквівалентними.

Відзначимо, що задача розширення ідеалу T до алгебри $p(1,2)$ для першої трійки операторів (3.4) розв'язана в [13; 14], де показано, що оператори $J_{\mu\nu}$ збігаються з одним із таких двох наборів операторів:

$$J_{\mu\nu} = g_{\mu\gamma} x_\gamma \partial_{x_\nu} - g_{\nu\gamma} x_\gamma \partial_{x_\mu} \quad (\mu,\nu,\gamma = 0,1,2); \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
J_{01} &= x_0\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_0} + \sin u\partial_u, \\
J_{02} &= x_0\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_0} + \cos u\partial_u, \\
J_{12} &= -x_1\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_1} + \partial u.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Провівши розширення ідеалу T до алгебри $p(1,2)$ для решти реалізацій (3.4), ми отримали ряд нових реалізацій алгебри $p(1,2)$. Повний результат класифікацій нееквівалентних

реалізацій алгебри $p(1,2)$ в класі векторних полів Лі (3.1) наведено в наступній теоремі, яку тут ми наводимо без доведення.

Теорема 3.2. З точністю до еквівалентності реалізації алгебри $p(1,2)$ вичерпуються реалізаціями (3.4) (a), (3.5); (3.4) (a), (3.6), та такими реалізаціями:

1. P_μ вигляду (3.4) (в), $J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + u\partial_{x_2} + x_2\partial_u$, $J_{02} = x_0x_1\partial_{x_0} + x_0u\partial_{x_1} +$ $+\left(x_2^2 - 1\right)\partial_{x_2} + x_2u\partial_{x_1}$, $J_{12} = -x_1x_2\partial_{x_0} - x_1u\,\partial_{x_2} - ux_2\partial_{x_2} - \left(1+u^2\right)\partial_u$.

2. P_μ вигляду (3.4) (c), де $h(x_2) = x_2$, $J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + \varphi\partial_{x_2}$, $J_{02} = x_0x_2\partial_{x_0} +$ $x_0\varphi\partial_{x_1} + \varphi^2\partial_{x_2} + a\partial_{x_0} + b\partial_{x_1} + qkd_u$, $J_{12} = -x_1x_2\partial_{x_0} - x_1\varphi\partial_{x_1} - x_2\varphi\partial_{x_2} + \alpha\partial_{x_0} +$ $+\beta\partial_{x_1} + p\partial_u$, де $\varphi = \pm\sqrt{x_2^2 - 1}, |x_2| > 1,$ а функції $a, b, \alpha, \beta, p, q$ набувають таких значень:

1) $\alpha = \beta = const, \quad a = b = {}^o e^{-2u}, \quad q = -x_2, \quad p = \varphi, \quad {}^o = 0,1;$

2) $a = \beta = \lambda_1\left[\dfrac{u}{1-u^2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right|\right] + \lambda_2, \quad \alpha = b = \dfrac{\lambda_1}{1-u^2}, \quad q = \varphi - x_2u, \quad p = \varphi u - x^2,$ $\lambda_1, \lambda_2 = const;$

3) $a = -\beta = \lambda x_2\varphi, \quad b = \lambda x_2^2, \quad \alpha = -\lambda\varphi^2, \quad p = q = 0, \quad \lambda = const;$

4) $a = -\beta = x_2u\varphi, \quad b = x_2^2u, \quad \alpha = -\varphi^2u, \quad p = q = 0;$

3. P_μ вигляду (3.4) (e), $J_{01} = \left(x_0x_1 + B\psi\right)\partial_{x_0} - \psi^2\partial_{x_1} + \left(Cx_1 + D\psi\right)\partial_{x_2} + A\psi\partial_u$, $J_{12} = \psi\partial_{x_1}$, $J_{02} = \left(x_0\psi - x_1B\right)\partial_{x_0} + x_1\psi\partial_{x_1} + \left(C\psi - x_1D\right)\partial_{x_2} - Ax_1\partial_u$, де $\psi = \pm\sqrt{1-x_1^2}$, $|x_1| < 1,$ а змінні A, B, C, D набувають таких значень:

1) $A = B = C = D = 0;$

2) $A = \sqrt{|x_2|}g(u), \quad B = x_2, \quad C = 2x_2, \quad D = x_2\sqrt{|x_2|}f(u);$

3) $A = x_2 f(u), \quad B = 0, \quad C = x_2, \quad D = x_2^2 g(u),$ де g, f – довільні гладкі функції змінної u.

4. P_μ вигляду (3.4) (g), $J_{12} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}$, $J_{01} = x_0x_1\partial_{x_0} + \left(x_2^2 - 1\right)\partial_{x_1} + x_1x_2\partial_{x_2} +$ $+x_2\theta\partial_{x_0} + x_2\rho\partial_u$, $J_{02} = x_0x_2\partial_{x_0} + x_1x_2\partial_{x_1} + \left(x_2^2 - 1\right)\partial_{x_2} - x_1\theta\partial_{x_0} - x_1\rho\partial_u$, де $\theta = f(u)\left(1 - \omega^{-1}\right), \ \rho = 0, f$ – довільна функція, або $\theta = 0, \rho = \omega^{-1}\sqrt{|\omega - 1|}; \omega = x_1^2 + x_2^2.$

Відзначимо, що реалізація (3.4) (d) ідеала T розширення до реалізації алгебри $p(1,2)$ не допускає.

ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ВИСНОВКИ

Отже, як випливає з результатів статті, задача класифікації нееквівалентних реалізацій алгебр Пуанкаре $p(1,1)$ та $p(1,2)$ в класі векторних полів Лі в просторах невисокої розмірності є цілком конструктивною. Отримані тут переліки реалізацій, разом з переліками робіт [6; 13; 14], дають повне розв'язання цієї задачі в просторах трьох і чотирьох змінних. При цьому, поділ змінних на незалежні та залежні є досить умовним. Тут ми вважали одну змінну залежною з тим, щоб у подальшому вивчити питання про опис найбільш загального вигляду скалярних рівнянь, які допускають отримані реалізації в якості алгебр інваріантності. Отримані реалізації можуть бути використаними і для опису пуанкаре-інваріантних систем диференціальних рівнянь в просторах малої розмірності.

Потрібно відзначити, що тут отримано і повний розв'язок задачі опису пуанкаре-інваріантних скалярних рівнянь з частинними похідними другого порядку в двовимірному просторі-часі. Задача опису пуанкаре-інваріантних рівнянь в тривимірному просторі-часі ще потребує свого розв'язання. На сьогодні мають місце лише її часткові розв'язки. Так, для реалізацій (3.4) (а), (3.5); (3.4) (а), (3.6) ця проблема розв'язана в [4; 5; 13]. Нам вдалося отримати ще чотири із семи диференціальних інваріантів для останньої реалізації із теореми 3.2, де $\theta = \rho = 0$:

$$I_1 = u, \quad I_2 = u_{x_0}^2 u_{x_0 x_0}, \quad I_3 = (\Sigma_1 - 1) u_{x_0}^2, \quad I_4 = \Sigma_1^{-1} \Big[(1-\Sigma_1)^3 \left(2\Sigma_1 \Sigma_2 u_{x_0}^2 + (1-\Sigma_1)\Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 \right) +$$

$$+ u_{x_0}^4 (\Sigma_1 - 1)^2 \Sigma_1^2 \Big],$$

де $\Sigma_1 = x_1^2 + x_2^2$,

$$\Sigma_2 = x_1 \left(u_{x_1} u_{x_0 x_0} - u_{x_0} u_{x_0 x_1} \right) + x_2 \left(u_{x_2} u_{x_0 x_0} - u_{x_0} u_{x_0 x_2} \right),$$

$$\Sigma_3 = x_2 \left(u_{x_1} u_{x_0 x_0} - u_{x_0} u_{x_0 x_1} \right) - x_1 \left(u_{x_2} u_{x_0 x_0} - u_{x_0} u_{x_0 x_2} \right).$$

Решта ж випадків ще потребують свого вивчення.

Також відзначимо, що отриманий перелік реалізацій алгебри $p(1,2)$ робить конструктивною задачу класифікацій нееквівалентних реалізації алгебри $c(1,2)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
3. Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Галлилея // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 19-34.
4. Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 46-53.
5. Fushchych W.I., Yehorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotations group O(n) and its extensions: E(n), P(1,n) // Acta Appl. Math. – 1992. – Vol. 38, № 1. – P. 69-92.
6. Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // J. Math. Phys. – 1990. – Vol. 31, № 5. – P. 1095-1105.
7. Rideau G., Winternitz P. Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group // J. Math. Phys. – 1993. – Vol. 34, № 3. – P. 558-569.
8. Фущич В.І., Лагно В.І. Лінійні та нелінійні зображення груп Галілея в двовимірному просторі-часі // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 3. – С. 414-423.
9. Fushchych W.I., Tsyfra I.M. and Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – Vol. 1, № 2. – P. 210-221.
10. Zhdanov R.Z., Fushchych W.I. On new representations of Galilei groups // J. Nonlin. Math. Phys. – 1997. – Vol. 4, № 3. – P. 426-435.
11. Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Fushchych W.I. On covariant realizations of the Euclid group // Commun. Math. Phys. – 2000. – Vol. 212. – P. 535-556.
12. Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. – К.: Радянська школа, 1941. – 415 с.
13. Yehorchenko I.A. Nonlinear representations of the Poincaré algebra and invariant equations // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Kiev: Institut of Mathematics, 1992. – P. 62-66.
14. Fushchych W., Zhdanov R., Lahno V. On linear and non-linear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – Vol. 1, № 3. – P. 295-308.

 Стаття надійшла до редколегії 15.03.10 р.