УДК 681.513, 62-502

**Тимченко В.Л.**

# ДОСЛІДЖЕННЯ КЕРОВАНОСТІ ЛІНІЙНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

*У статті запропоновано підхід до визначення аналітичних видів критеріїв керованості нестаціонарних безперервних та дискретних багатовимірних систем, які дозволяють провести структурно-параметричну оцінку здатності розімкнутих та замкнутих систем керування, гарантовано досягти заданого стану за кінцевий час.*

***Ключові слова:*** *система керування, критерії керованості, нестаціонарні безперервні багатовимірні системи, дискретні багатовимірні системи.*

*В статье предложен подход к определению аналитических видов критериев управляемости нестационарных непрерывных и дискретных многомерных систем, которые позволяют провести структурно параметрическую оценку способности разомкнутых и замкнутых систем управления, гарантированно достичь заданного состояния за время конечное время.*

***Ключевые слова:*** *система управления, критерии управляемости, нестационарные непрерывные многомерные системы, дискретные многомерные системы.*

*Approach to determination of analytical types of criteria of controllability of the no stationary continuous and discrete multidimensional systems which allow conducting structure and parameters estimation of ability of the open-loop and closed-loop control systems and it is assured to achieve the set being for final time is offered in the article.*

***Key words:*** *control the system, criteria of dirigibility, non-stationary continuous multidimensional systems, discrete multidimensional systems.*

## *АКТУАЛЬНІСТЬ НАУКОВОЇ ПРОБЛЕМИ*

Здатність багатовимірної динамічної системи здійснити гарантований перехід з початкової множини стану в задану множину стану за кінцевий час визначає поняття керованості системи та є її найважливішою структурно-параметричною характеристикою. Керованість стаціонарних лінійних систем (по Калману) є достатньо досліджена [1,2], критерії мають аналітичний вид в вигляді умови невирожденості матриці керованості [3] чи базуються на концепції структурної керованості [4] та дозволяють проводити оцінку керованості в тому числі систем з інтервальною невизначеністю параметрів та авторегресійних систем [5]. В той же час проблема керованості динамічної поведінки нестаціонарних систем, до яких відноситься клас квазілінеаризованих систем, описаний в [6, 7], не отримала достатнього розвитку, але представляє значний інтерес з точки зору аналізу якісних структурно-параметричних характеристик динамічних систем.

## *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ*

Метою даної статті є визначення на основі аналізу динамічної поведінки нестаціонарної системи керування аналітичних критеріїв керованості для розімкнутих і замкнутих безперервних та дискретних систем.

***ФОРМУВАННЯ КРИТЕРІЮ КЕРОВАНОСТІ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ***

Розглянемо нестаціонарну динамічну систему (рис.1) з вектором стану $\mathbf{X}(t)$, керовану вектором управлінь $\mathbf{U}(t)$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \tag{1}$$

де $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ — матриці, компоненти яких представляють відомі часу, безперервні і диференціюванні.

Продиференцюємо систему (1) $n$ раз та отримаємо

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) + \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\dddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\dot{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) + \ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\ddot{\mathbf{U}}(t) + 2\dot{\mathbf{B}}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \ddot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A}(t)\overset{(n-1)}{\mathbf{X}}(t) + (n-1)\dot{\mathbf{A}}(t)\overset{(n-2)}{\mathbf{X}}(t) + g\ddot{\mathbf{A}}(t)\overset{(n-3)}{\mathbf{X}}(t) + \ldots + q\overset{(k)}{\mathbf{A}}(t)\overset{(n-k-1)}{\mathbf{X}}(t) + \ldots$$

$$+ \overset{(n-1)}{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t)] + \mathbf{B}(t)\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t) + (n-1)\dot{\mathbf{B}}(t)\overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) + \ldots + q(n-1)\overset{(k)}{\mathbf{B}}(t)\overset{(n-k-1)}{\mathbf{U}}(t) + \ldots + \overset{(n-1)}{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t),$$

де $g, q, \ldots,$– третій, четвертий та інші ($n$ – 2) коефіцієнти при відповідних доданках з виразу $(n+1)^n$.

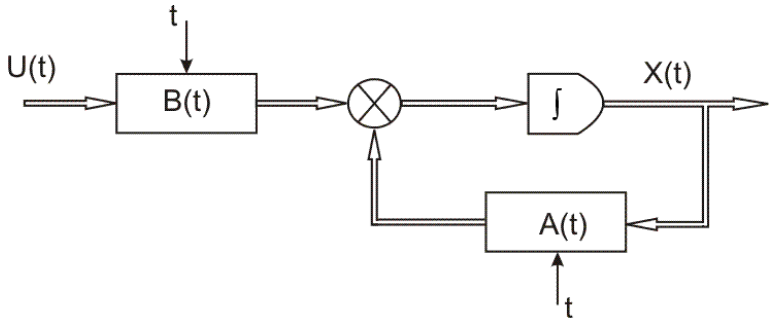


**Рис. 1. Структурна схема нестаціонарної системи керування**

Для встановлення залежностей між вектором координат та керування для формування критерію керованості нестаціонарних систем необхідно в правій частині останнього рівняння позбутись проміжних похідних вектора координат.

Проілюструємо запропонований підхід на прикладі стаціонарної системи виду

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \tag{2}$$

де $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матриці постійних коефіцієнтів;

це має вигляд після диференціювання $n$ раз

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t);$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(t);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\overset{(n-1)}{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t),$$

та підстановки першого рівняння в друге і т.д. отримуємо

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(t) + \cdots + \mathbf{A}\mathbf{B}\overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{B}\overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t).$$

Створимо блочну матрицю із $n$ матриць при похідних $\mathbf{U}(t)$

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B} \end{vmatrix},$$

сформуємо складний вектор $\mathbf{U}^*(t)$

$$\mathbf{U}^*(t) = \begin{vmatrix} \overset{(n-1)}{\mathbf{U}}(t) & \overset{(n-2)}{\mathbf{U}}(t) & \cdots & \dot{\mathbf{U}}(t) & \mathbf{U}(t) \end{vmatrix}^{\mathbf{T}},$$

запишемо

$$\overset{(n)}{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\mathbf{X}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}^*(t)$$

та сформулюємо критерій керованості для стаціонарних систем.

Система $n$-го порядку виду (2) із початкового стану досягне заданого стану за кінцевий час, т.ч. буде повністю керованою при виконані умови

$rank\mathbf{K} = n$.

Це означає, що матриця $\mathbf{K}$ має не менш ніж $n$ незалежних стовпців.

Фізичний зміст критерію керованості полягає у тому, при його виконанні кожній керованій координаті динамічної системи відповідає невироджене значення керуючого впливу.

Для нестаціонарної системи властивість керованості буде залежати від часу, оскільки кожному фіксованому моменту руху (тобто фіксованому – стаціонарному режиму) буде відповідати своє значення компонентів блочної матриці $\mathbf{K}(t)$ та її рангу в момент часу *t*, тобто безпосередньо суті критерію керованості динамічної системи. Таким чином дослідження керованості буде базуватись на формуванні областей керованості для часових відрізків.

Продовжимо перетворення системи рівнянь (1)

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\dddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) +$$
$$2\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\ddot{\mathbf{U}}(t) + 2\dot{\mathbf{B}}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \ddot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\overset{(4)}{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}^4(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) +$$
$$+ 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}(t)\ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\ddot{\mathbf{U}}(t) + 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) +$$
$$+ \mathbf{A}(t)\ddot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + 3\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^2(t)\mathbf{X}(t) + 3\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + 3\dot{\mathbf{A}}^2(t)\mathbf{X}(t) + 3\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) +$$
$$+ 3\dot{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t) + 3\ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + 3\ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}(t)\dddot{\mathbf{U}}(t) + 3\dot{\mathbf{B}}(t)\ddot{\mathbf{U}}(t) + 3\ddot{\mathbf{B}}(t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \dddot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t).$$

Розглянемо порядок формування блочної матриці на прикладі системи четвертого порядку та сформуємо її із чотирьох матриць при похідних $\mathbf{U}(t)$.

Перший компонент матриці має вигляд

$$\mathbf{K_1}(t) = \mathbf{B}(t),$$

другий

$$\mathbf{K_2}(t) = \dot{\mathbf{B}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t),$$

третій

$$\mathbf{K_3}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 2\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + \ddot{\mathbf{B}}(t),$$

четвертий

$$\mathbf{K_4}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\ddot{\mathbf{B}}(t) +$$
$$+ 3\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + 3\dot{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{B}}(t) + 3\ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}(t) + \dddot{\mathbf{B}}(t).$$

Таким чином, критерій керованості для системи четвертого порядку буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K}(t) = rank\begin{vmatrix} \mathbf{K_1}(t) & \mathbf{K_2}(t) & \mathbf{K_3}(t) & \mathbf{K_4}(t) \end{vmatrix} = 4$$

та визначатись для кожного моменту часу *t*.

Для випадку, коли компоненти матриць $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$ є явні лінійні функції часу, тобто пропорційні *t*, перші похідні становляться постійними, а другі і вищі похідні рівняються нулю. Тоді можна записати для відповідних компонентів блочної матриці:

перший компонент

$$\mathbf{K_1}(t) = \mathbf{B}(t),$$

другий

$$\mathbf{K_2}(t) = \mathbf{B}^* + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t),$$

третій

$$\mathbf{K_3}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}^* + 2\mathbf{A}^*\mathbf{B}(t),$$

четвертий

$$\mathbf{K_4}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B}^* + 2\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^*\mathbf{B}(t) + 3\mathbf{A}^*\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) + 3\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*,$$

де $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ – постійні матриці, отримані як перші похідні матриць $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

Для системи $n$-го порядку блочна матриця $\mathbf{K}_n$ буде матричною функцією $\Im(\overset{(n-i)^{n-k}}{\mathbf{A}}, \overset{(n-k)}{\mathbf{B}})$, де $k = 1,\ldots, n$; $i = 2,\ldots, n$.

Особливий та частий випадок є, коли компоненти матриці **B** мають постійні значення. Тоді маємо критерій керованості для системи четвертого порядку

$$rank\mathbf{K}(\tau) = rank\left|\mathbf{K_1} \quad \mathbf{K_2}(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K_4}(t)\right| = 4,$$

де $\mathbf{K_1} = \mathbf{B}$;

$$\mathbf{K_2}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{B};$$

$$\mathbf{K_3}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{B} + 2\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B};$$

$$\mathbf{K_4}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{B} + 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B} + 3\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B} + 3\ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{B}.$$

При керування, яке є скалярною функцією часу, маємо замість матриці **B** вектор – рядок **b**

$$\mathbf{B} = \left|b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_{n-1} \quad b_n\right|^{\mathbf{T}} = \mathbf{b}.$$

Критерій керованості для стаціонарної системи буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \cdots \quad \mathbf{A^{n-2}b} \quad \mathbf{A^{n-1}b}\right| = n.$$

Для нестаціонарної системи перший компонент блочної матриці має вигляд

$$\mathbf{K_1}(t) = \mathbf{b}(t),$$

другий

$$\mathbf{K_2}(t) = \dot{\mathbf{b}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{b}(t),$$

третій

$$\mathbf{K_3}(t) = \mathbf{A}^2(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{b}}(t) + 2\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \ddot{\mathbf{b}}(t),$$

четвертий

$$\mathbf{K_4}(t) = \mathbf{A}^3(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}^2(t)\dot{\mathbf{b}}(t) + 2\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)\ddot{\mathbf{b}}(t) +$$
$$3\dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{b}(t) + 3\dot{\mathbf{A}}(t)\dot{\mathbf{b}}(t) + 3\ddot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{b}(t) + \dddot{\mathbf{b}}(t).$$

В разі, коли матриця **A** є діагональною, всі компоненти котрої різні, для керованості системи достатньо вимоги, щоб вектор – рядок **b** не вміщував нульових компонентів.

### *КЕРОВАНІСТЬ ЗАМКНУТИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ*

Розглянемо стаціонарну лінійну динамічну систему, що описується векторно-матричним рівнянням (2) та охоплюється головним одиничним зворотним зв'язком, тобто замкнену систему (рис. 2).

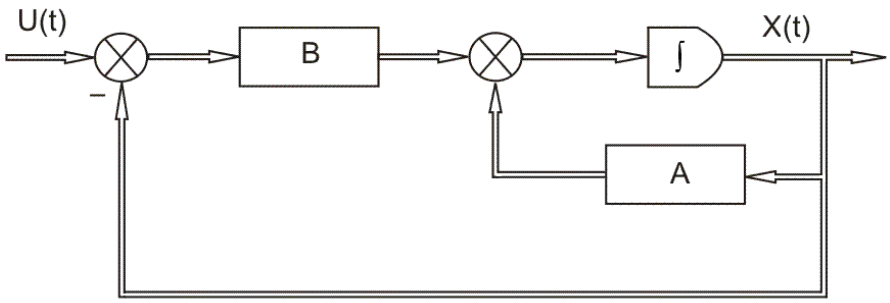


**Рис. 2. Структурна схема замкнутої системи**

В такому випадку рівняння (2) прийме вигляд

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}[(\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}(t)] = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t).$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\right| = n.$$

Для випадку, коли «жорсткий» зворотний зв'язок не є одиничним, а описується матрицею постійних параметрів **R,** векторно-матричне рівняння запишеться у вигляді

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t).$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\right| = n.$$

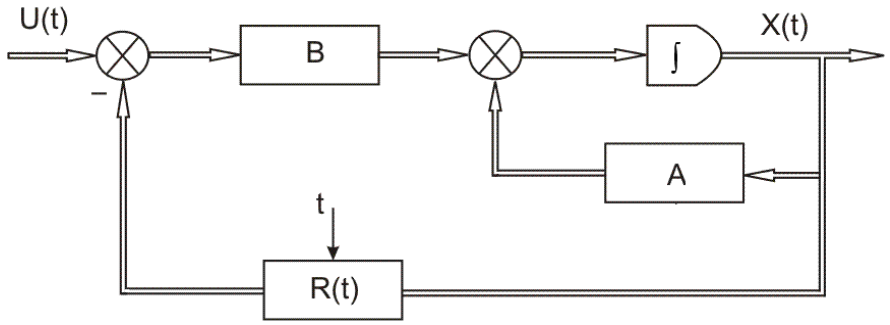


**Рис. 3. Структурна схема замкнутої системи з «гнучким» зворотним зв'язком**

В разі «гнучкого» зворотного зв'язку (рис.3) динамічна система (2) стає нестаціонарною, оскільки матриця **R** буде включати компоненти, що є функціями часу, т.ч.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) = \widetilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t),$$

де $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t) = \widetilde{\mathbf{A}}(t)$.

Для систем четвертого порядку зі «гнучким» зворотним зв'язком при постійних компонентах матриці **A** та **B** будемо мати критерій керованості

$$rank\mathbf{K}(\tau) = rank\left|\mathbf{K_1} \quad \mathbf{K_2}(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K_4}(t)\right| = 4,$$

де $\mathbf{K_1} = \mathbf{B}$;

$$\mathbf{K_2}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B};$$

$$\mathbf{K_3}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]^2(t)\mathbf{B} - 2\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B};$$

$$\mathbf{K_4}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]^3(t)\mathbf{B} + 2[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B}.$$

Для випадку, коли на вхід стаціонарної системи (рис. 4) подається вектор спостережуваних координат $\mathbf{Y}(\mathrm{t}) = \mathbf{CX}(\mathrm{t}) + \mathbf{DU}(\mathrm{t})$, будемо мати для одиничного зворотного зв'язку

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BD})\mathbf{U}(t) = \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{X}(t) + \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t),$$

де $\widehat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BC}); \widetilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{BD})$.

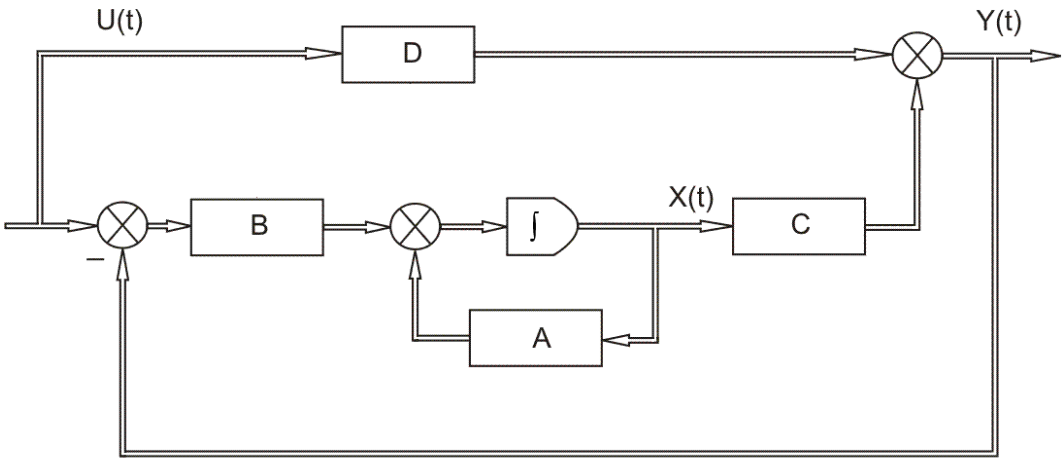


**Рис. 4. Структурна схема стаціонарної системи, замкнутої по вектору спостережуваних координат**

Для «жорсткого» зворотного зв'язку, що включає матрицю параметрів **R,** будемо мати

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BRD})\mathbf{U}(t) = \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{X}(t) + \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t),$$

де $\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}); \widetilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{BRD})$.

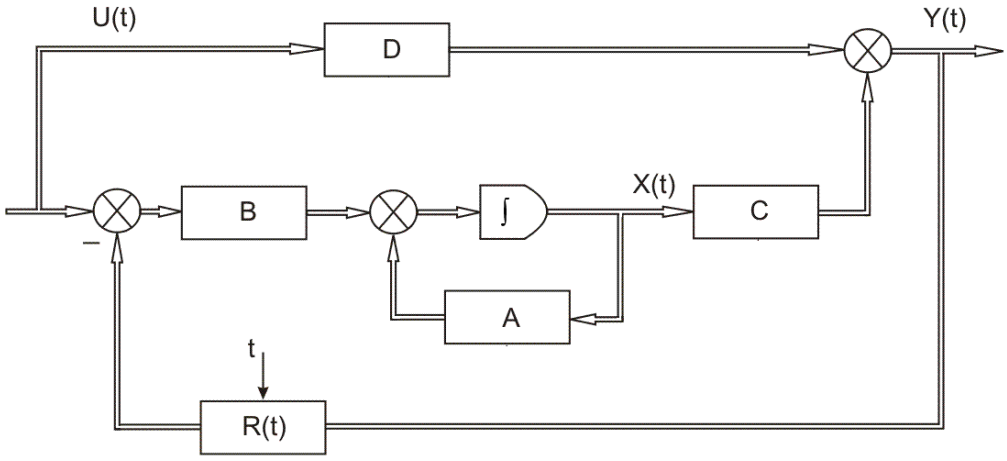


**Рис. 5. Структурна схема системи, замкнутої «гнучким» зворотним зв'язком по вектору спостережуваних координат**

При «гнучкому» зворотному зв'язку (рис. 5) запишемо

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)\mathbf{C}]\mathbf{X}(t) + [\mathbf{B} - \mathbf{BR}(t)\mathbf{D}]\mathbf{U}(t) = \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}(t)\mathbf{X}(t) + \widetilde{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t).$$

Критерії керованості для таких систем визначаться з уже відомих співвідношень.

### *КЕРОВАНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ*

При використанні різницевої схеми система рівнянь стаціонарної системи керування, що описується векторно-матричним рівнянням (2), запишеться наступним чином

$$\frac{\mathbf{X}[k+1]-\mathbf{X}[k]}{\Delta t}=\mathbf{AX}[k]+\mathbf{BU}[k],$$

де $k = 0,1,2,\ldots$ $m$– порядок інтервалу дискретності;

$\Delta t$ – інтервал часу дискретності.

Приймемо $\Delta t$= 1 та отримаємо

$$\mathbf{X}[k+1]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+\mathbf{BU}[k], \tag{3}$$

де **E** – одинична матриця.

Для другої похідної маємо після підстановки та векторно-матричних перетворень

$$\mathbf{X}[k+2]-2\mathbf{X}[k+1]+\mathbf{X}[k]=\mathbf{A}(\mathbf{X}[k+1]-\mathbf{X}[k])+\mathbf{B}(\mathbf{U}[k+1]-\mathbf{U}[k]);$$

та запишемо для координати стану в $k+2$ інтервал дискретності

$$\mathbf{X}[k+2]=(\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k]+\mathbf{BU}[k+1]=$$

$$=\mathbf{X}[k+2]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2\mathbf{X}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k]+\mathbf{BU}[k+1].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності аналогічним чином отримаємо

$$\mathbf{X}[k+3]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^3\mathbf{X}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\mathbf{A}^2\mathbf{B})\mathbf{U}[k]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k+1]+\mathbf{BU}[k+2].$$

Для вектору координат стану об'єкта керування в $n$ – й інтервал дискретності будемо мати

$$\mathbf{X}[n]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^n\mathbf{X}[0]+(\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})\mathbf{U}[0]+\ldots+(\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[n-2]+\mathbf{BU}[n-1].$$

Створимо блочну матрицю із $n$ матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[i]$, де $i = 0,\ldots, n-1$;

$$\mathbf{K}=\begin{vmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{B}+\mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} & \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\end{vmatrix},$$

сформуємо складний вектор $\mathbf{U}^*[i]$

$$\mathbf{U}^*[i]=\begin{vmatrix}\mathbf{U}[n-1] & \mathbf{U}[n-2] & \cdots & \mathbf{U}[1] & \mathbf{U}[0]\end{vmatrix}^{\mathbf{T}},$$

та запишемо

$$\mathbf{X}[n]=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{\mathbf{n}}\mathbf{X}[0]+\mathbf{KU}^*[i]$$

та сформулюємо критерій керованості для стаціонарних дискретних систем.

Стаціонарна система $n$ – го порядку виду (3) із будь-якого початкового стану досягне за допомогою керуючої сили будь-якого заданого стану за кінцеву кількість інтервалів дискретності, т.ч. буде повністю керованою при виконані умови

$$rank\mathbf{K}=n\,.$$

Для нестаціонарної дискретної системи отримання критерію значно ускладнюється громіздкістю обчислювання, тому обмежимось системою третього порядку та приймемо компоненти матриці **B** постійними.

Запишемо для нестаціонарної дискретної лінійної системи

$$\mathbf{X}[k+1]=(\mathbf{A}[k]+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+\mathbf{BU}[k] \tag{4}$$

при тих самих позначеннях, що для стаціонарної системи.

Для другої похідної будемо мати

$$\mathrm{X}[k+2]-2\mathrm{X}[k+1]+\mathrm{X}[k]=\mathrm{A}[k](\mathrm{X}[k+1]-\mathrm{X}[k])+$$

$$+(\mathrm{A}[k+1]-\mathrm{A}[k])\mathrm{X}[k]+\mathrm{B}(\mathrm{U}[k+1]-\mathrm{U}[k]);$$

та для $k+2$ інтервалу дискретності

$$\mathbf{X}[k+2]=(\mathbf{A}[k+1]+\mathbf{A}^2[k]+\mathbf{A}[k]+\mathbf{E}])\mathbf{X}[k]+\mathbf{BU}[k+1]+(\mathbf{B}+\mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності запишемо

$$\mathbf{X}[k+3]=(\mathbf{A}[k+2]+\mathbf{A}^3[k]+3\mathbf{A}[k+1]\mathbf{A}[k]++\mathbf{A}[k+1]+\mathbf{A}[k]+\mathbf{E})\mathbf{X}[k]+$$

$$\mathbf{BU}[k+2]+(\mathbf{B}+\mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k+1]+(\mathbf{B}+2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B}+\mathbf{A}^2[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Створимо блочну матрицю із трьох матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[k];\mathbf{U}[k+1];\mathbf{U}[k+2]$

$$\mathbf{K}[k+3]=\left|\mathbf{B}\quad \mathbf{B}+\mathbf{A}[k]\mathbf{B}\quad \mathbf{B}+2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B}+\mathbf{A}^2[k]\mathbf{B}\right|$$

та запишемо критерій керованості для дослідженої нестаціонарної дискретної системи (4) в $k+3$ інтервал дискретності

$$rank\mathbf{K}[k+3]=3. \qquad (5)$$

Процедура визначення критерію показує, що для висновку о повній керованості дискретної нестаціонарної системи необхідно провести аналіз керованості кожної з *n* координат стану. В той же час для переводу системи (4) з нульового стану ($k$ = 0) в заданий стан по довільній траєкторії за три інтервали дискретності необхідно виконання умови (5).

### *ВИСНОВКИ*

Отримані в статі аналітичні критерії керованості нестаціонарних безперервних та дискретних багатовимірних систем дозволяють провести структурно-параметричну оцінку здатності розімкнутих та замкнутих систем керування гарантовано досягти заданого стану за кінцевий час.

### *ЛІТЕРАТУРА*


1. Kalman R.E. Mathematical description of linear dynamical system // SIAM J. on Control. – 1963. – P. 152-192.
2. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М., Наука, 1987. – 711 с.
3. Чаки Ф. Современная теория управления. – М.: Мир, 1975. – 424 с.
4. Шашихин В.Н. Критерии управляемости и наблюдаемости интервальных систем в синтезе робастного управления // Проблемы управления и автоматики. – 2002. – № 5. – С. 65-79.
5. Rocha P., Willems J.C. Controllability of 2-D systems // «IEEE Trans. Automat. Contr.». – 1991. – № 4. – P. 413-423.
6. Тимченко В.Л. Управляемость системы электроприводов // Сб. научн. трудов «Электрооборудование и автоматизация установок и систем». – НКИ., 1988. – С. 55-62.
7. Тимченко В.Л. Квазілінеаризація нелінійних динамічних систем при допустимих коливаннях // Наукові праці МДГУ Серія «Комп'ютерні науки». – 2008. – Випуск 77, Том 90. – С. 190-195.


Рецензенти: д.т.н., проф. Кондратенко Ю.П.
д.т.н., проф. Казарєзов А.Я.



*Стаття надійшла до редколегії 01.03.09*