УДК 62-50

БІДЮК П.І., КРОПТЯ А.В.

МОДЕЛЬ БАГАТОВИМІРНОГО РОЗПОДІЛУ НА ОСНОВІ КОПУЛ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ УПРАВЛІННЯ РИЗИКАМИ

Вступ

Оцінювання рівня ризиків та управління ризиками шляхом зміни структури портфеля фінансових інструментів вимагають побудови адекватних багатовимірних моделей. Одним з підходів є моделювання окремо маргінальних розподілів та структури залежностей відповідних змінних з використанням спеціальних функцій – копул [1-4]. Критерієм якості такої моделі є точність визначення на її основі оцінок мір ризику [5-9], які надають кількісну характеристику ступеня ризиковості, та зручність виконання таких традиційних процедур управління ризиками, як аналіз сценаріїв [10, 11]. Складність спільного розподілу декількох змінних, що відносяться до різних ризиків, накладає обмеження на побудову аналітичних виразів для оцінювання міри ризику. Зазначимо, що отримання оцінок мір ризиків за методом Монте -Карло вимагає застосування ефективних методів генерування належних значень за допомогою спеціальних функцій – копул [12-15].

Постановка задачі

У рамках даної роботи планується розв'язання таких задач: (1) сформулювати системний підхід до аналізу ризиків багатовимірного портфеля фінансових інструментів (ПФІ); (2) визначити призначення найбільш поширених мір ризику при побудові ризикового профілю; (3) розробити теоретично обгрунтовані оцінки мір ризиків ПФІ на основі ймовірнісного і статистичного моделювання з використанням теорії екстремальних значень та спеціальних функцій – копул; (4) визначити можливість та ефективність застосування запропонованих методів на практиці, на прикладі статистичного аналізу курсів валют.

Модель

Для статистичного аналізу рівня ризиків у роботі використовується модель на основі комбінованих маргінальних розподілів та копул. Спільний розподіл ризиків розглядається у вигляді:

$$H(x_1,...,x_n) = P[X_1 \le x_1,...,X_n \le x_n] = C\left(F_1(x_1),...,F_n(x_n)\right),$$

де F_1, … F_n – маргінальні функції розподілу окремих ризиків, C – n – копула, що характеризує структуру залежності між ризиками. Застосування цієї моделі орієнтовано на еліптичні копули, архімедові копули та копули екстремальних значень. Правий хвіст маргінального розподілу моделюється через розподіл перевищень у формі узагальненого розподілу Парето:

$$GPD_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi\, x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1-\exp(-x/\beta), & \xi = 0, \end{cases}$$

де $\beta > 0$ та $x \geq 0$ при $\xi > 0$, а $0 \leq x \leq -\beta / \xi$ при $\xi < 0$; ξ – параметр форми розподілу; β – параметр масштабу. Центральні спостереження моделюються нормальним розподілом.

Аналіз сценаріїв

Одним з відомих підходів до опису ризиків є обчислення вартості ПФІ ризикових позицій за різних ринкових умов. Такий підхід називають аналізом сценаріїв. Аналіз сценаріїв має два різновиди – шокове тестування та аналіз чутливості.

Шокове тестування спрямоване на дослідження наслідків різких та значних змін ринку. Воно є особливо корисним у випадках, коли ринкові зрушення приводять до якісних змін деяких умов ринку. Шокове тестування представляє собою процес визначення та аналізу ситуацій – створення сценаріїв, що дозволяли б виявляти екстремальні ризики портфеля та реалізацію цих сценаріїв на моделі з метою отримання якісних та кількісних оцінок ризику. Розробка сценаріїв проводиться на основі спостережень під час минулих криз, спостережень з інших галузей або реалістичних потенційно екстремальних сценаріїв. Системних методів створення таких сценаріїв поки що не існує. Для аналізу результатів реалізації сценаріїв зі значними кількісними та якісними змінами необхідно мати гнучку модель ризиків. Модель на основі функцій зв'язку та комбінованих маргінальних розподілів дозволяє змінювати в сценаріях параметри розподілів окремих ризиків, використовувати типи маргінальних розподілів, відмінні від типів розподілів за припущенням основної моделі, додавати екстремальності змінам через значення параметрів хвостових розподілів та змінювати характеристики залежності між ризиками. Шокове тестування не надає можливості визначити ймовірності виявлених сценаріїв, що призводять до великих втрат. Тому його застосування в управлінні ризиками обмежене врахуванням ризиків для кожної потенційно ризикової події окремо.

Аналіз чутливості дозволяє отримати ризикову характерирістику портфеля в некризових ринкових умовах за наявності невеликих змін. Він виконується на великій кількості реалістичних сценаріїв, що не передбачають екстремальних подій. Використання моделі ризиків на основі функцій зв'язку та комбінованих маргінальних розподілів дозволяє змінювати не лише значення параметрів розподілу, а й нехвостові частини маргінальних розподілів окремо від їх хвостів, тим самим змінюючи модель для звичайних ринкових умов та залишаючи без змін модель для екстремальних значень, яка будується на даних довших часових періодів і часто є слабко залежною від розподілу центральних спостережень.

Міри ризику

Кількісна оцінка ризику за допомогою коректних мір є однією з головних задач менеджменту ризиків через необхідність порівнювати ризики від прийняття тих або інших рішень. Ризик, з одного боку – як втрати або недоотриманий прибуток, визначається майбутньою вартістю позиції. З іншого боку, ризик виникає через мінливість вартості.

Міри ризику, що грунтуються на розумінні ризику як значення майбутньої вартості називаються когерентними. В [16] у вигляді аксіом сформульовано обов'язкові вимоги до когерентних мір ризику ρ. Ці вимоги мають фінансову природу і походять з правил прийняття ризиків, розроблених інвестиційними менеджерами та практичними

методами регулювання. Наведеним нижче аксіомам 1-3 повинні задовольняти когерентні несубаддитивні міри ризику.

Позначимо через X та Y випадкові величини, що відображають майбутні вартості портфелів, складених з ризикових позицій. Портфель, у якому всі позиції мають більшу майбутню вартість, ніж в іншому, вважається менш ризиковим.

Аксіома 1: Монотонність. Якщо $X \geq Y$, тоді $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

Інвестування суми в активи з відомою ставкою доходності r, для яких майбутня вартість є детермінованою і відомою, зменшує ризик на величину, що інвестується.

Аксіома 2: Інваріантність до переносу. Для константи a:

$$\rho(X + a \cdot (1 + r)) = \rho(X) - a.$$

Ризик зростає зі збільшенням розміру ризикової позиції. Для великих позицій до простого зростання ризику (у відповідності до зростання інвестованого капіталу) додається зростання ризику ліквідності. Велика позиція не може бути так само легко реалізована на ринку, як мала. Але для невеликих позицій міра ризику повинна бути прямо пропорційною до розміру позиції.

Аксіома 3: Додатня однорідність: $\rho(bX) = \rho(bY)$ для будь-якого додатного числа b.

Міри відхилення ризику δ повинні задаватися іншою аксіоматикою [17]. Несубаддитивні міри відхилення ризику задовольняють аксіомам 4-6. Характеристика відхилень недетермінованого ризику X завжди має бути додатною і дорівнювати нулю у випадку, коли X є константою.

Аксіома 4: $\forall X \quad \delta(X) \geq 0$.

Інвестування в актив, майбутня вартість якого відома через ставку доходності r і не є мінливою, не повинно впливати на характеристику відхилень портфеля.

Аксіома 5: $\delta(X + a \cdot (1 + r)) = \delta(X)$.

Для повністю ліквідного ринку збільшення інвестованої суми призводить до пропорційного збільшення відхилень вартості.

Аксіома 6: $\forall X, \forall \lambda > 0 \quad \delta(\lambda X) = \lambda \delta(X)$.

Аксіома субаддитивності грунтується на припущенні стосовно того, що диверсифікація активів зменшує ризики. Крім того, субаддитивні міри ризику зручні при використанні на рівні організації, оскільки вони гарантують, що загальний ризик не перевищить суми ризиків окремих підрозділів, портфелів або позицій.

Аксіома 7: Субаддитивність когерентних мір ризику. $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Аксіома 8: Субаддитивність мір відхилення ризику. $\delta(X + Y) \leq \delta(X) + \delta(Y)$.

Виконання аксіоми 7 є необхідним для когерентних мір ризику (субаддитивних когерентних мір ризику); аксіоми 8 – для мір відхилення ризику (субаддитивних мір відхилення ризику).

З аксіом 1-3 та аксіоми субаддитивності можна отримати вираз для когерентних мір ризику, який має такий загальний вигляд [16]:

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \Psi} E_{\mu}\left[\frac{-X}{1 + r}\right], \qquad (1)$$

де Ψ – сімейство ймовірнісних мір. Тобто будь-яка когерентна міра ризику є математичним сподіванням максимальних втрат для деякої множини сценаріїв. Як видно з (1), при розширенні множини сценаріїв збільшується і значення міри ризику. Те, що міри ризику спираються на множини сценаріїв підтверджує практичність аналізу сценаріїв в управлінні ризиками. Когерентні міри ризику, для яких виконується нерівність $\rho(X) > E[-X]$, коли X не є константою, та $\rho(X) > E[-X]$, коли X – константа, називають обмеженими сподіваннями. Між когерентними мірами ризику, обмеженими сподіванням та мірами відхилення ризику існує однозначна відповідність:

$$\delta(X) = \rho(X - EX),$$
$$\rho(X) = E[-X] + \delta(X).$$

За виконання цих умов δ є мірою відхилення ризику, пов'язаною з когерентною мірою ризику ρ, а ρ – мірою ризику, пов'язаною з δ. Разом ці пари мір утворюють ризиковий профіль.

Оцінювання основних мір ризику

Міра ризику VaR. Міра ризику, тобто *вартість, якою ризикуємо*, позначається через VaR (Value-at-Risk); вона розроблена як відповідь на значні екстремальні фінансові події та катастрофи. Початковою метою було кількісне оцінювання фінансових ризиків з використанням стандартних статистичних методів. Тобто VaR є ймовірнісною мірою потенційних втрат, що вказує на поріг, який можуть перевищити очікувані втрати у звичайних ринкових умовах на заданому часовому горизонті та із заданим довірчим рівнем.

Означення 1: для заданого рівня $\alpha \in [0,1]$ та випадкової величини X α-квантилем називається величина:

$$q_\alpha = \{x \in R \mid P[X \le x] \ge \alpha\}.$$

Значення квантилів при достатньому наборі значень α добре характеризують положення та розсіювання розподілу.

Означення 2: Мірою ризику VaR з довірчим рівнем α для випадкової величини X (прибутки та втрати, де втрати – від'ємні величини) є така:

$$VaR_\alpha(X) = q_\alpha(-X).$$

Якщо розподіл втрат має функцію розподілу F, то $\mathrm{Var}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$, де F^{-1} є оберненою функцією до F.

VaR, що створена як кількісна характеристика короткотермінового ринкового ризику, використовується в багатьох системах управління кредитними та операційними ризиками. Ця міра ризику є однією з найважливіших компонент загальної методології, прийнятої практиками та регулюючими організаціями при кількісній оцінці ризиків. За допомогою VaR-інструментів вирішуються задачі розміщення економічного капіталу та знаходження компромісу між прибутком та ризиком. VaR задовольняє аксіомам 1-3 для когерентних мір ризику, але не задовольняє аксіомі субаддитивності.

При використанні запропонованої моделі спільного розподілу ризиків з комбінованими маргінальними розподілами, знаходження аналітичної оцінки для VaR вважаємо недоцільним. Пропонуємо використати емпіричну оцінку, отриману за методом Монте-Карло. Якщо $\{X_{i:j}\}$ – вибірка розміром n, впорядкована таким чином, що $X_{1:n} \le \ldots \le X_{n:n}$, то емпірична оцінка міри ризику VaR визначається так:

$$VaR_\alpha(X) = X_{\max(i \in N \mid i \le n\alpha):n}.$$

Процес обчислення цієї оцінки складається з послідовності таких кроків:

1. Обрати довірчий рівень α.
2. Згенерувати достатньо велику кількість векторів у відповідності з оціненими маргінальними розподілами центрів і хвостів та функцією зв'язку для спільного розподілу змін.
3. Обчислити за допомогою цінових моделей змодельовані вибірки втрат і прибутків для всіх інструментів.
4. Обчислити VaR як найменші втрати для $1-\alpha$ відсотків найгірших випадків.

Міра ризику ES. Когерентною альтернативою до міри ризику VaR є міра ризику ES (Expected Shortfall – очікувані втрати).

Означення 3: Мірою ризику ES з довірчим рівнем α для випадкової величини X є

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{1-\alpha}\left(E\left[X1_{\{-X \ge q_\alpha(-X)\}}\right] + q_\alpha(-X)\{\alpha - P[-X < q_\alpha(-X)]\}\right).$$

ES є математичним сподіванням втрат на заданому часовому горизонті та довірчому рівні, тоді як VaR представляє мінімальні втрати:

$$ES_\alpha = -E[X \mid X \le -VaR_\alpha].$$

Міру ризику ES називають також умовною VaR. Емпіричною оцінкою ES є

$$ES_\alpha(X) = -\frac{\sum_{k=1}^{max(i \in N | i \le n\alpha)} X_{k:n}}{max(i \in N \mid i \le n\alpha)}.$$

Міри ризику Марковіца. Марковіц запропонував використовувати за міри ризику спочатку стандартне відхилення $\sigma(X) = \| X - EX \|$, а потім напіввідхилення $\sigma_-(X) = \|[X - EX]_-\|$ [5]. Обидві міри задовольняють всім чотирьом аксіомам мір відхилення ризику. При управлінні ризиками зручніше користуватись мірою у вигляді напіввідхилення $\sigma_-(X)$. Для вибірки X_i розміром n емпіричними оцінками мір відхилення ризику є такі:

для стандартного відхилення

$$\hat{\sigma}(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\right)^2};$$

і для напіввідхилення

$$\hat{\sigma}_-(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[X_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\right]_-\right)^2}.$$

Емпіричні оцінки міри ризику VaR або когерентної міри ризику ES та мір відхилення ризику разом надають оцінку ризикового профілю.

Генерування з копул. При застосуванні копул у практиці управління ризиками виникає потреба в методах Монте-Карло для знаходження оцінок мір ризику, мір відхилення ризику та аналізу сценаріїв. Тобто генерування значень залежних випадкових величин із заданими маргінальними розподілами та копулою. Існує загальна схема отримання вибірки зі спільного розподілу, структура залежності в якому описується копулою. З теореми Скляра генерування вибірки випадкових величин $X_1, \dots X_n$ з маргінальними функціями розподілу $F_1, \dots F_n$ та копулою C здійснюється таким чином [18]:

1. Згенерувати випадкові величини $u_1, \dots u_n$ з рівномірними на $[0,1]$ одновимірними розподілами, та спільним розподілом з копулою C.
2. Отримати значення x_i як

$$x_i = F_i^{-1}(u_i),$$

де F_i^{-1} зворотна до F_i функція.

У залежності від властивостей сімейства копул, реалізація першого кроку може бути спрощена.

Еліптичні копули

Означення 4: Характеристичною функцією $\varphi:R^n \to C$ випадкового n-вимірного вектора X є

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX},$$

де tX – покоординатний добуток векторів t та X. Характеристична функція однозначно визначає ймовірнісний розподіл.

Означення 5 [19]: Ймовірнісний розподіл для n-вимірного вектора X називається еліптичним, якщо для деякого вектора $\mu \in R^n$, додатно визначеної матриці $\Sigma \in R^{n\times n}$ та деякої функції $\phi:[0,\infty) \to R$, характеристична функція вектора $X-\mu$ має вигляд $\varphi_{X-\mu}(t) = \phi\left(t^T \Sigma t\right)$.

Еліптичними ці розподіли називають через еліптичність ліній незмінності функцій щільності розподілів. Будь-яка лінійна комбінація еліптичних розподілів також є еліптичним розподілом. Маргінальні розподіли спільного еліптичного розподілу також представляють собою еліптичні розподіли. Еліптичні копули визначають через спільні еліптичні розподіли H та зворотні функції $F_i^{(-1)}(u_i)$ до функцій маргінального розподілу:

$$C(u_1,...,u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1),...,F_n^{(-1)}(u_n)).$$

Генерування випадкових величин зі структурою залежності, заданою еліптичною копулою, зводиться до генерування з відповідного еліптичного розподілу. Наведений нижче алгоритм дозволяє генерувати з Гаусової копули, що відповідає нормальному розподілу, n-вимірний вектор $(X_1,...,X_n)$ з кореляційною матрицею ρ:

1. Генеруємо n незалежних випадкових величин $u_1,...,u_n$ з нормальним розподілом.
2. Представляємо ρ у вигляді декомпозиції $\rho = A \cdot A^T$, де A – нижня трикутна матриця.
3. Обчислюємо $\vec{y} = A \cdot \vec{u}$.
4. Через функцію одновимірного нормального розподілу Φ отримаємо $x_i = \Phi(y_i)$.

Для генерування з більш складних еліптичних копул будь-який центрований еліптично розподілений вектор X представляють через центрований нормально розподілений вектор N з тією ж кореляційною матрицею та незалежною від N випадковою величиною r: $X = rN$. Наприклад, для t-розподілу Стьюдента з ν ступенями свободи r має розподіл χ^2 з ν ступенями свободи.

Архімедові копули. Копули, що можуть бути представлені у вигляді $C(u_1,...,u_n) = \varphi^{[-1]}\left(\varphi(u_1) + ... + \varphi(u_n)\right)$, називають архімедовими. Універсальний алгоритм генерування копул будується на основі того, що

$$C(u_1,...,u_n) = C_n(u_n \mid u_1,...,u_{n-1})...C_2(u_2 \mid u_1)C_1(u_1),$$

де C_2 – копула для перших k компонент, $C_1(u_1) = u_1$. Для генерування із спільного розподілу достатньо виконати такі кроки:

– згенерувати n незалежних випадкових величин $v_1,\ldots,v_n$;

– послідовно обчислити $u_1 = v_1$, $u_2 = C_2^{-1}(v_2 \mid u_1)$, ..., $u_n = C_n^{-1}(v_n \mid u_1,\ldots,u_{n-1})$.

Для архімедових копул наведений алгоритм спрощується, наприклад, до такого:

$$u_2 = \varphi_2^{[-1]}\left(\varphi_2\left(\varphi_1^{[-1]}\left(\frac{\varphi_1(u_1)}{v_2}\right)\right) - \varphi_2(u_1)\right).$$

Копули екстремальних значень. Нехай $(X_{i1},\ldots,X_{im})$, $i = 1,2,\ldots$ є незалежними однаково розподіленими m-вимірними випадковими векторами з функцією розподілу F. Нехай

$$M_{ij} = \max_{1\le i\le n} X_{ij}, \quad j = 1,\ldots,m$$

є покомпонентним максимумом. Багатовимірний розподіл екстремальних значень є границею випадкових векторів $\left(\frac{(M_{1n}-a_{1n})}{b_{1n}},\ldots,\frac{(M_{mn}-a_{mn})}{b_{mn}}\right)$. Якщо граничний розподіл існує, то кожна одновимірна компонента розподілу є одновимірним розподілом екстремальних значень, який можна записати у вигляді:

$$C\big(H(z_1;\gamma_1),\ldots,H(z_m;\gamma_m)\big),$$

де $H(z_j;\gamma_j)$ є узагальненим розподілом екстремального значення, а C є копулою. Природним є те, що маргінальні розподіли відносяться до сімейства розподілів екстремальних значень, але більший інтерес викликає копула:

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_{1n} + b_{1n}z_1,\ldots,a_{mn} + b_{mn}z_m) = C\big(H(z_1;\gamma_1),\ldots,H(z_m;\gamma_m)\big). \qquad (2)$$

Нехай r_j є строго зростаючим перетворенням X_{ij}; позначимо змінні та максимум після перетворення через X_{ij}^* та M_{in}^*, відповідно. Більше того, припустимо, що $\frac{M_{in}^* - a_{jn}^*}{b_{jn}^*}$ збігається до розподілу екстремальних значень при $n \to \infty$ для всіх j. Нехай

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} P(M_{1n}^* \le a_{1n}^* + b_{1n}^* z_1^*,\ldots,M_{mn}^* \le a_{mn}^* + b_{mn}^* z_m^*)$$
$$= C^*\big(H(z_1^*;\gamma_1^*),\ldots,H(z_m^*;\gamma_m^*)\big).$$

Можна показати, що $C = C^*$ та:

$$C(u_1^t,\ldots,u_m^t) = C^t(u_1,\ldots,u_m) \qquad (3)$$

для всіх $t > 0$. Копули, що задовольняють цій умові, називають копулами екстремальних значень.

До екстремальних копул відносять, наприклад, сімейство двовимірних копул Гумбела

$$C_\theta(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right),$$

де $\theta \ge 1$.

Генерування значень з екстремальних копул вимагає використання універсальних методів генерування із ймовірнісних розподілів. Для розв'язання цієї задачі пропонуємо використати багатовимірне узагальнення одновимірного методу так званого скибкового генерування [13].

Метод скибкового генерування. Якщо необхідно згенерувати вибірку з ймовірнісного розподілу на деякій підмножині з R^n, який задається функцією щільності розподілу, що пропорційна деякій функції $f(x)$, це може бути здійснено шляхом рівномірного генерування з $n+1$-вимірної області, яка знаходиться під графіком $f(x)$. Формально ця ідея може бути представлена шляхом введення додаткової змінної y та визначенням спільного розподілу x та y, який є рівномірним по області під поверхнею, яка задається $f(x)$:

$$U = \{(x, y) : 0 < y < f(x)\}.$$

Звідси маємо, що щільність спільного розподілу (x, y) має вигляд:

$$p(x, y) = \begin{cases} 1/\int f(x)dx & 0 < y < f(x) \\ 0, & y \le 0, \quad y \ge f(x) \end{cases}.$$

Генерування незалежних точок, рівномірно розподілених в U, непроста задача, тому визначається марковський ланцюг, який збігається до цього розподілу. Одним з варіантів розв'язання цієї задачі є застосування вибірки Гіббса – генерування з умовного розподілу y при заданому x, який є рівномірним на інтервалі $(0, f(x))$, та з умовного розподілу для x при поточному y, що є рівномірним по $S = \{x : y < f(x)\}$; цей розподіл називають "скибкою" (або сектором), визначеною на y. Досить складним може бути також генерування незалежної, рівномірно розподіленої точки з S. Воно може бути замінене на деяке оновлення x, що залишає незмінним рівномірність розподілу на S.

Позначимо через $f(x)$ функцію, пропорційну щільності розподілу, через x_0 – поточний стан та через x_1 – новий стан; для одновимірного випадку Ніл пропонує такий метод генерування [13]:

1. Отримати дійсне значення y рівномірно з $(0, f(x_0))$ і таким чином отримати горизонтальну "скибку" $S = \{x : y < f(x)\}$. Зауважимо, що x_0 завжди з S.

2. Знайти інтервал $I = (L, R)$ навколо x_0 що містить принаймні велику частину цієї скибки.

3. Згенерувати нову точку x_1 з частини скибки, що належить до обраного інтервалу (тобто з $S \cap I$).

На першому кроці обираємо значення допоміжної змінної, яка є характерною для методу скибкового генерування. Відзначимо, що немає необхідності зберігати значення цієї змінної від ітерації до ітерації. Для того щоб уникнути проблем, пов'язаних з точністю представлення чисел з плаваючою комою, можна використати функцію $g(x) = \log(f(x))$ замість функції $f(x)$. У цьому випадку допоміжна змінна

$z = \log(y) = g(x_0) - e$, де e – експоненціально розподілена величина з математичним сподіванням, рівним одиниці; тоді скибка визначається так: $S = \{x : z < g(x)\}$. Другий та третій кроки можуть бути реалізовані різними методами, однак результатом повинен бути марковський ланцюг, що залишає незмінним розподіл, визначений функцією $f(x)$.

Визначення відповідного інтервалу є другим кроком методу. Бажано, щоб цей інтервал містив якомога більшу частину скибки. Це необхідно для того, щоб дозволити новій точці відрізнятися від попередньої настільки, наскільки це можливо, але при цьому також слід уникати інтервалів, набагато більших за скибку, тому що це робить наступний крок – генерування нової точки – менш ефективним. Можна застосовувати декілька схем знаходження інтервалу:

1. Ідеально мати $L = \inf(S)$ та $R = \sup(S)$. Це означало б, що інтервал I дорівнює найменшому інтервалу, що містить весь S. Однак це може бути недосяжним на практиці.

2. Якщо x обмежене, то в якості I можна використовувати весь діапазон. Однак це неефективно у випадку, коли розміри скибки значно менші за діапазон.

3. Задатися оцінкою розміру скибки ω та випадковим чином обрати початковий інтервал розміром ω, який б містив точку x_0 та можливо розширити його. Наприклад, шляхом подвоєння в один із боків, чи додавання такого ж інтервалу з одного боку, доки обидва кінці інтервалу не будуть лежати зовні скибки.

У багатовимірному випадку є два принципово відмінних між собою варіанти генерування вибірки:

– Одновимірний метод послідовно застосовується до кожної із змінних багатовимірного розподілу.

– Метод скибкової вибірки застосовується до багатовимірного розподілу безпосередньо шляхом формування рівномірної вибірки з області, що знаходиться під багатовимірним графіком функції щільності цього розподілу.

Саме другий підхід був використаний в експерименті, перш за все тому, що він є більш природним і може бути обгрунтований по аналогії з одновимірним методом. При цьому також відбувається генерування вибірки з рівномірного розподілу в інтервалі від нуля до значення функції щільності в поточній точці та рівномірний вибір зі скибки, що задається вертикальним положенням. Коли скибка має багато вимірів, отримання рівномірної вибірки з неї є менш очевидним, ніж у випадку одновимірної скибки. У цьому випадку інтервал $I = (L, R)$ замінюється на гіперінтервал $H = \{x : L_i < x_i < R_i \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$. Тобто L_i та R_i задають довжину гіперінтервалу по осі x_i.

Найпростішим способом знаходження H є його розташування випадковим чином по вимірах так, щоб воно було рівномірним серед всіх H, що містять x_0. Інші ж процедури побудови інтервалу не мають такого простого узагальнення. Наприклад, процедура додавання інтервалу, доки всі вершини не будуть лежати за границями скибки буде неефективною, оскільки n-вимірний інтервал має 2^n вершин. Тому в реалізації використано метод розширення інтервалу до тих пір, поки точка, яка взята рівномірно з цього інтервалу належить скибці.

Експеримент

Запропонована модель застосована до аналізу обмінних курсів швейцарського франка, англійського фунта стерлінга, японської єни та долара США відносно євро. Для оцінювання параметрів моделі взяті щоденні курси з 03.1998 по 01.2006, за виключенням похибок в інформації, що дало вибірку розміром 1643 спостереження. Оцінено параметри одновимірних маргінальних розподілів для кожного з курсів та параметри копул за методом максимальної правдоподібності (табл. 1).

Таблиця 1

Оцінки параметрів копул

Копула	Параметр	Значення	Середньоквадр. похибка
Гумбела	θ	1,6720	0,0158
Нормальна	ρ_1	0,5637	0,0118
	ρ_2	0,3318	0,0136
	ρ_3	0,5943	0,0120
	ρ_4	0,8241	0,0054
	ρ_5	0,8593	0,0051
	ρ_6	0,8037	0,0061
Франка	β	4,5874	0,0911

Емпірична оцінка міри ризику VaR для квантиля 0,03, тобто для 50 спостережень, що перевищують поріг, дорівнює 3,4967. Для квантиля 0.01, відповідно 16 спостережень, що перевищують поріг 3,5345. Спостережень для квантиля 0,03 достатньо для можливості використання на практиці емпіричної оцінки, а для квантиля 0,01 вибірка є замалою і виникає необхідність в моделюванні розподілу ризиків і визначення оцінки міри ризику VaR за моделлю.

Таблиця 2

Оцінки міри ризику VaR

Копула	Квантиль	Розмір вибірки		
		100	1000	10000
Гумбела	0,03	3,4140	3,4770	3,4896
	0,01	3,4375	3,5665	3,6008
Нормальна	0,03	3,5006	3,5386	3,5346
	0,01	3,6177	3,6880	3,6603
Франка	0,03	3,4986	3,4797	3,4959
	0,01	3,5139	3,5632	3,5892

З даних табл. 2 видно, що оцінки міри ризику VaR за моделями на основі комбінованих маргінальних розподілів, поєднаних у спільний розподіл за допомогою копул Гумбела та Франка, мають похибку відносно емпіричного значення для квантиля 0,03, відповідно 0,203 % та 0,022 %. Модель з нормальною копулою має похибку 1 %. З цих результатів можна зробити висновок про адекватність всіх трьох моделей та доцільність використання на практиці, для таких даних, моделі на основі копули Франка. Тобто оцінкою міри ризику VaR для квантиля 0,01 з побудованої моделі є 3,5892. З тих самих трьох моделей були отримані оцінки когерентної міри ризику ES.

Таблиця 3

Оцінки міри ризику ES

Копула	Квантиль	Розмір вибірки		
		100	1000	10000
Гумбела	0,03	3,5121	3,5752	3,5835
	0,01	3,5348	3,6479	3,6737
Нормальна	0,03	3,6104	3,6475	3,6438
	0,01	3,7124	3,7733	3,7523
Франка	0,03	3,5857	3,5662	3,5836
	0,01	3,6017	3,6548	3,6822

Значенням емпіричної оцінки ES для квантиля 0,03 є 3,6074. Виходячи з оцінок, наведених в табл. 3, найбільш адекватною моделлю для обчислення оцінок цієї міри ризику є також модель з копулою Франка. Звідси видно, що оцінкою по моделі для ES з рівнем 0,01 є 3,6822.

Таблиця 4

Оцінки міри ризику Марковіца

Метод оцінки	σ_+
Копула Гумбела	0,1330
Нормальна копула	0,1462
Копула Франка	0,1370
Емпірична оцінка	0,1733

Всі три моделі дають гірші результати для міри відхилення ризику, запропонованої Марковіцем, ніж для обох хвостових мір ризику. Запропонована модель використовується також для активного управління ризиками шляхом зміни структури портфеля з метою оптимізації обраної міри ризику.

Висновки

Для знаходження оцінок параметрів копул у запропонованій моделі метод максимальної правдоподібності виявився ефективним за критерієм середньоквадратичної похибки. Підхід до отримання оцінок мір ризику, який

грунтується на генеруванні вибірки, надав точність до долей відсотка при оцінюванні неекстремальних квантилів. Якість отриманих оцінок мір відхилення ризику, що є частиною ризикового профілю, вимагає подальшого вдосконалення моделі. При цьому висока якість оцінок хвостових мір ризику вказує на те, що в моделі на основі комбінованих маргінальних розподілів із використанням нормального розподілу та узагальненого розподілу Парето необхідно покращити описання саме центральної частини спостережень. У подальшому слід розглянути можливість застосування відмінних від нормального розподілів для моделювання центральних спостережень при побудові комбінованого маргінального розподілу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Di Clemente A., Romano, C. Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk: A Copula-based Approach // Economic Notes, 2004, Vol. 33, №. 3, pp. 325-357.
2. Hiirlimann W. Multivariate Frechet Copulas and Conditional Value-at-Risk International Journal of Mathematics and Mathematical Sciencies, 2004, Vol.7, pp. 345-364.
3. Li, David X. On Default Correlation: A Copula Function Approach // Journal of Fixed Income, 2000, Vol. 9, pp 43 – 54.
4. Breymann W., Dias A., Embrechts P. Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance //Quantitative Finance, 2003, Vol. 3, № 1, pp. 1-14.
5. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance, 1952, № 7, pp. 77 – 91.
6. Christoffersen P., Hahn J., Inoue A. Testing and Comparing Value at Risk Measures // Journal of Empirical Finance, Vol. 8, № 3, July 2001, pp. 325-342.
7. Guojun Wu, Zhijie Xiao An Analysis of Risk Measures // Journal of Risk, 2002, № 4, pp. 53-75.
8. Acerbi C., Tasche D. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk // Economic Notes, 2002, Vol. 31, № 2, pp. 379-388.
9. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall // Journal of Banking and Finance, 2002, Vol. 26, № 7, pp. 1487-1503.
10. Plackov D., Sadus R.J., Dimson E. Stress tests of capital requirements // Journal of Banking and Finance, 1997, Vol. 21, № 11, pp. 1515-1546.
11. Longin F.M. From value at risk to stress testing: The extreme value approach // Journal of Banking and Finance, 2000, Vol. 24, pp. 1097 – 1130.
12. Glasserman P., Heidelberger P., Shahabuddin P. Efficient Monte Carlo Methods for Value-at-Risk // Mastering Risk, 2001, Vol. 2: Applications, Ed: C. Alexander, Prentice Hall, pp. 7-20.
13. Neal R. Slice sampling // Ann. Statist., 2003, Vol. 31, № 3, pp 705-767.
14. Evans M., Swartz T. Random Variable Generation Using Concavity Properties of Transformed Densities // Journal of Computational and Graphical Statistics, 1998, Vol. 7, №. 4, pp. 514-528.
15. Chernozhukov V., Hong H. An MCMC approach to classical estimation //Journal of Econometrics, 2003, Vol. 115, № 2, pp. 293-346.
16. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent Measures of Risk // Math. Finance, 1999, № 3, pp. 203-228.
17. Rockafellar, R.T., Uryasev, S., Zabarankin, M. Generalized Deviations in Risk Analysis // Finance and Stochastics, 2006, Vol. 10 , № 1, pp. 51 – 74.
18. Nelsen R. An Introduction to Copulas, 2nd ed. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – 269 p.
19. Hult H., Lindskog F. Multivariate extremes, aggregation and dependence in elliptical distributions // Advances in Applied Probability, 2002, Vol. 34, № 3, pp. 587-608.