УДК 681.5

Сагайдак Л.О.

Визначення кількості інформації, яку містить об'єкт, за допомогою обрахунку симетрій об'єкта

1. Вступ

У сучасному світі важливу роль відіграє проблема визначення кількості інформації, що містить об'єкт досліджень. А також не менш важливу роль відіграє задача про філософський зміст поняття інформації, її властивості та можливі шляхи формалізації. Дана стаття адресує нове поняття інформації об'єкта, що отримане поки що емпіричним шляхом, і його подальша формалізація знаходиться на стадії розробки. В той самий час результати емпіричних досліджень виявились досить цікавими та такими, що обіцяють успішну подальшу формалізацію введених понять.

Проблема визначення стану об'єкта/системи та прогнозування його/її поведінки за вихідним сигналом є дуже актуальною в різних галузях досліджень, таких, як біологія, социологія та фізика. Приклади таких задач обговорюються в [1]. Наприклад, в [2] автори пропонують методи передбачення часу найближчого епілептичного нападу на основі аналізу ЕЕГ (електроенцефалограми) пацієнта. В даному випадку як системи розглядають мозок пацієнта, а ЕЕГ – це вихідний сигнал системи, що саме і несе інформацію про стан об'єкта/системи дослідження. Тобто матеріальним носієм інформації є саме вихідний сигнал об'єкта.

Слід відмітити, що в теперішній час існує значна кількість досліджень з математичної теорії інформації, в тому числі з постановками загальних конструкцій структури теорії (див., наприклад, узагальнення в [3, 4]). Однак різноманітність задач, пов'язаних з поняттям інформації, у зв'язку із розширенням практичних застосувань інформатики призводить до необхідності розширення границь науки про інформацію, в тому числі й дедуктивним методом. Тому в даній роботі викладено пропозиції до вивчення інформаційного вмісту сигналів та процесів, пов'язаного з їх геометричними властивостями, в силу чого можна говорити про "геометричну інформацію", пов'язану із властивостями симетрії об'єктів, що досліджуються. При цьому в статті основний наголос робиться на можливих практичних аспектах та можливості запропонованих величин в задачах обробки інформації. В даній роботі автором продовжено розробку підходу [5] до обчислення інформації індивідуального об'єкта, що належить певному класу, у випадку, коли кожен індивідуальний об'єкт є детермінованим, тобто відсутній набір імовірностей розподілу елементів у класі.

2. Теоретичні основи методу

2.1. Введення поняття кількості інформації кривої та поняття інформаційного інваріанта кривої

В [5] задається величина кількості інформації в послідовності символів (слові) на основі інформації, за Хартлі, таким чином.

Нехай множина X складається зі скінченного числа (k) різних букв. Назвемо його алфавітом. Тоді $\Omega = X^n$ – це множина слів довжини n в алфавіті X. Та нехай на X^n діє симетрична група перестановок $G = S_n$, що переставляє позиції букв у слові. Тому на X^n $\forall\ \omega \in X^n$ можна ввести величину кількості інформації

$$I(\omega) = \log|G\omega| = \log\left[G : G_\omega\right], \qquad (2.1)$$

що базується на понятті кількості інформації, за Хартлі. Детально див. [5]. Тут $G\omega$ – це орбіта елемента $\omega \in X^n$ відносно групи $G = S_n$, тобто $\forall \omega \in \Omega,\quad G\omega = \{\sigma\omega \in \Omega \mid \sigma \in G\}$, G_ω – це стаціонарна підгрупа елемента $\omega \in X^n$, тобто $\forall \omega \in \Omega,\quad G_\omega = \{g \in G \mid \quad g\omega = \omega\}$ та $\left[G{:}G_\omega\right]$ – це потужність множини всіх лівих суміжних класів групи G за підгрупою G_ω, і дорівнює $\frac{|G|}{|G_\omega|}$.

Якщо буква $a_i \in X$ входить в слово $\omega \in X^n$ m_i разів, то розбиття $n{=}m_1{+}\ldots{+}m_l$, $l{\le}k$ визначає композицію $\left(m_1,\ldots,m_l\right)$ слова. Назвемо ті підслова слова ω, що складаються з однакової букви, блоками. **Всі слова однієї й тієї ж орбіти відносно елементів S_n мають одну й ту ж композицію.** Стаціонарна підгрупа G_ω визначається в даному випадку прямим добутком стаціонарних груп $S_{m_1} \times \ldots \times S_{m_p}$. Отже, базуючись на (2.1), кількість інформації в послідовності символів обраховується за формулою

$$I_0(\omega) = \log\left(\frac{n!}{m_1!\ldots m_l!}\right) \qquad (2.2)$$

і називається 0-інформацією послідовності символів (слова).

Далі в [5] вводиться поняття кількості інформації кривої як кількість інформації слова, в яке вона кодується. Наведемо процедуру, за якою крива кодується у послідовність символів. Вважатимемо, що крива γ має вигляд графіка однозначної функції на підмножині $\overline{Q}$ циліндра $C{=}S^1{\times}R^1$ з областю визначення на колі одиничного периметра S^1, R^1 – дійсна пряма. Введемо на C дискретну сітку координат з кроком h по x та τ по y, $x_i = h{\cdot}i$, $i = 1,\ldots,n$; $y_j = \tau \cdot j$, $j = 1,\ldots,M$ (вважаючи, що $h{\cdot}n{=}1$ та $\tau \cdot M = H$, де H – висота $\overline{Q}$). Поставимо у відповідність кривій γ слово деякого алфавіту таким чином. Інтервалові $\left[y_j, y_{j+1}\right]$ставиться у відповідність літера a_j. Тоді крива γ кодується словом ω_n довжини n в алфавіті з M літер, причому інтервалові $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ ставиться у відповідність та літера алфавіту, що відповідає відрізку по y, на якому крива перетинає координатну лінію осі y, проведену з x_{i+1}. Якщо γ потрапляє в точці x_{i+1} в y_j, то для визначеності ставимо в слові ω_n в позиції i літеру a_j. Отже, таким чином отримуємо деяку апроксимацію кривої за допомогою послідовності символів. Назвемо кількістю інформації в кривій кількість інформації, обчислену за (2.2), що містить послідовність символів, яка даній кривій співставляється.

Також в [5] розглядається норма Фітінгофа послідовності символів

$$\Phi\left(\omega_n\right)= \sum_{i=1}^{l} \frac{m_i}{n}\log\frac{m_i}{n} \approx \frac{I_0(\omega_n)}{n}, \qquad (2.3)$$

де ω_n – це послідовність символів довжини n, що ставиться у відповідність кривій.

Далі вводиться інформаційний інваріант кривої як

$$\tilde{\Phi}= \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\omega_n\right). \qquad (2.4)$$

Існування $\tilde{\Phi}$ доведено в Теоремі 1 [5, стор. 17] для обмежених функцій Морса (таких, що мають невироджені критичні точки) із обмеженими першими похідними. Також доведено, що близькі в метричному розумінні криві, закодовані у послідовності символів будуть мати близькі значення інформаційних інваріантів.

2.2. Введення понять інформаційних індексів та дослідження їх властивостей

В даному підпункті наведемо деяке розвинення ідей, що коротко було викладено в попередньому підпункті. А саме розширимо поняття інформаційного інваріанта для кривої, що закодована у слово.

Нехай крива γ є графіком обмеженої функції Морса, що має обмежену першу похідну. І нехай крива кодується у слово, як описано в попередньому підпункті, за допомогою алфавіту $A_0 = X$. Введемо алфавіт твірних елементів A_1 таким чином

$$\begin{gathered} A_1 = \{a_{ij} \mid a_{ij} \in X^2, a_{ij} = (a_i, a_j), a_i, a_j \in X; i, j = 1\ldots M, \\ (i = j) \vee (i = j-1) \vee (i = j+1)\} \end{gathered} \qquad (2.5)$$

Тобто A_1 – це певна підмножина множини слів довжини 2, $A_1 \subset X^2$, причому i, j – це порядкові номери елементів в алфавіті $A_0 = X$. Інакше кажучи, в (2.5) a_i та a_j такі, що є сусідніми в $A_0 = X$. Якщо довжина слова ω_n достатньо велика, то справедлива Лема 1 з [5] про те, що при достатньо великому значенні n в слові ω_n, яке відповідає кривій, будуть присутні всі літери з заданого діапазону. Також легко помітити, що ω_n складається з блоків певних елементів алфавіту $A_0 = X$, та два сусідніх блоки складаються з елементів, що є сусідніми в $A_0 = X$, тобто $\omega_n = (\ldots a_{i-1}, a_{i-1}, \ldots a_{i-1}, a_i, a_i, \ldots a_i, a_{i+1}, a_{i+1}, \ldots a_{i+1}, \ldots)$, де i - це порядковий номер елемента в алфавіті $A_0 = X$. В такому випадку послідовності символів ω_n в алфавіті X можна поставити у відповідність слово $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$, $\tilde{n} = [n/2]$ в алфавіті A_1, оскільки A_1 також є для ω_n множиною твірних елементів. Тепер можемо обчислити величину I_1 для слова ω_n, що є 0-інформацією для слова $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$ відносно групи $\tilde{G} = \tilde{S}_{\tilde{n}}, \tilde{n} = [n/2]$ перестановок елементів алфавіту A_1 в слові $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$:

$$I_1(\omega_n) = \log|\tilde{G}\omega_n|, \quad \tilde{G} = \tilde{S}_{\tilde{n}}, \tilde{n} = \left[\frac{n}{2}\right] \qquad (2.6)$$

$$I_1(\omega_n) = \log\left(\frac{\tilde{n}!}{\prod_{i=1}^{\tilde{l}} \tilde{m}_i!}\right) \qquad (2.7)$$

Тут $(\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_l)$ - це композиція слова ω_n відносно нового алфавіту A_1. Підкреслимо, що слово ω_n отримане із використанням алфавіту X, а аналізується відносно A_1 як слово $\tilde{\omega}_{\tilde{n}}$. Величину $I_1(\omega_n)$ назвемо 1-інформацією послідовності символів або інформаційним індексом. Аналог норми Фітінгофа вводиться таким чином:

$$\Phi_1(\omega_n) = \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{n}} \log \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{n}} \qquad (2.8)$$

Назвемо $\Phi_1(\omega_n)$ 1-нормою слова ω_n. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.1 (Узагальнення Теореми 1 [5, стор. 17])

Розглянемо f - функцію Морса на S^1 така, що $|f| < c_1$ та $|df/dx| < c_2$, де c_1, c_2 - деякі константи, і f - має щонайменше три точки глобального екстремуму на S^1. Крива γ, що відповідає функції f, кодується у слово довжини n в алфавіті X. Тоді існує границя

$$\tilde{\Phi}_1 = \lim_{\tilde{n} \to \infty} \Phi(\omega_{\tilde{n}}) \qquad (2.9)$$

Доведення Теореми 2.1 в даній статті не наводиться з причин його громіздкості. Повністю доведення даної теореми може бути знайдене в [6]. Вимога щодо того, щоб функція f мала щонайменш три точки глобального екстремуму, продиктована ходом доведення Теореми 1, а саме – необхідно, щоб отримане після кодування слово містило всі проміжні елементи алфавіту A_1^* між елементом з мінімальним та максимальним порядковими номерами. Вимогу щодо екстремумів у формулюванні теореми 1 можна зняти, видозмінивши алфавіт A_1. Введемо алфавіт:

$$A_1^* = \{a_{ij} \in X^2 \,|\, a_{ij} = (a_i, a_j) = (a_j, a_i), a_i, a_j \in X, i, j = 1 \ldots M, (i = j) \vee$$
$$\vee (i = j-1) \vee (i = j+1)\}$$

А саме – в алфавіті A_1^* елементи (a_i, a_j) та (a_j, a_i) сприймаються як один і той же елемент, тобто як рівні. Відповідно при перестановці цих символів в слові ω_n буде отримане деяке слово $\hat{\omega}_n$, що буде належати стаціонарній підгрупі слова ω_n, тобто, інакше кажучи, перестановка фрагментів слова (a_i, a_j) та (a_j, a_i) не змінить вихідний об'єкт для споглядача. Крива кодується в алфавіті $A_0 = X$, а інваріант $\tilde{\Phi}_1$ обчислюється для алфавіту A_1^*, як це було описано вище. Зрозуміло, що цілком аналогічним чином формулюється аналог Теореми 2.1 для випадку алфавіту A_1^*, при чому вимога наявності щонайменш трьох глобальних екстремумів у функції f на S^1 знімається.

Зауваження. Завдяки введенню нового алфавіту A_1^* отримали можливість фіксувати не тільки переносні симетрії кривої, як у випадку використання алфавіту A_1, але й дзеркальні симетрії кривої, що досліджується.

Зауваження. Логічно припустити, що, якщо розглядати алфавіти $A_r, r \geq 2$, елементами яких є підслова, що належать X^{r+1} (тобто блоки, що складаються з комбінацій $r+1$ літер вихідного алфавіту $A_0 = X$), та видозмінити алфавіти $A_r, r \geq 2$ з метою фіксувати як переносні так і дзеркальні симетрії вихідного об'єкта, то можна навести формулювання аналогів Теореми 1 і на випадок використання алфавітів $A_2^*, A_3^* \ldots$. Отримані інваріанти назвемо відповідно $\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \ldots$ – 2-норма, 3-норма,… Формалізація даних узагальнень потребує подальшого дослідження, проте їх властивості було підтверджено чисельно [7]. Опишемо, наприклад, алфавіти A_2, A_2^* :

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_{ijk} \in X^3 \mid \overleftarrow{a} = (a_i, a_j, a_k),\ a_i, a_j, a_k \in X, (i=j=k) \vee \big((i=j) \wedge ((k=j-1) \vee (k=j+1))\big) \vee \\ \vee \big((j=k) \wedge ((i=j-1) \vee (i=j+1))\big) \vee \\ \vee \big((j=i+1) \wedge (k=j+1)\big) \vee \big((j=i-1) \wedge (k=j-1)\big);\ i,j,k=1,2,3\ldots \end{array} \right\}$$

$$A_2^* = \left\{ \begin{array}{l} a_{ijk} \in X^3 \mid \overleftarrow{a} = (a_i, a_j, a_k) = (a_k, a_j, a_i), a_i, a_j, a_k \in X, (i=j=k) \vee \big((i=j) \wedge ((k=j-1) \vee (k=j+1))\big) \vee \\ \vee \big((j=k) \wedge ((i=j-1) \vee (i=j+1))\big) \vee \big((j=i+1) \wedge (k=j+1)\big) \vee \big((j=i-1) \wedge (k=j-1)\big);\ i,j,k=1,2,3\ldots \end{array} \right\}$$

Окрім чисельного дослідження отриманих величин, в [7] також наводиться обговорення отриманих результатів.

Відмітимо одну властивість $\Phi(\omega_n)$, а саме $\Phi(\omega_n)$ є інтеграл за інваріантною мірою, що визначається групою автоморфних перетворень об'єкта. Можна припустити, що для загальної інформації, що вводиться в [5], вона також буде деяким інтегралом за інваріантною мірою. Таким чином, з'являється можливість обчислювати інформацію за допомогою інтегрування. Можливо, використовуючи інваріантні міри, можна ввести аналог симетрійної розмірності для кривої γ, не виконуючи кодування кривої у послідовність символів, тобто провести узагальнення на неперервний випадок.

3. Висновки

В даній статті наводиться деяке розвинення ідей, запропонованих в [5] для обчислення кількості інформації індивідуального об'єкта та його застосування до індивідуальних кривих з фіксованих класів. Також цікавим напрямком подальшого дослідження, що розвинуло б запропонований підхід, є подальша формалізація введених величин і приведення їх до системи загальних та порівняння із загальними конструкціями в математичній теорії інформації, в тому числі й приведеними в [3, 4].

Література

1. *Makarenko A.* Geometrical Approach to the Measure of Individual Object Complexity, Proc. Of Fifteenth European Meeting on Cybernetics and Systems Research, 25-28 April 2000. Vol.1., Pp. 21-24, Austrian Society for Cybernetics Studies, Vienna, 2000.
2. *Makarenko A., Olexandruk B., Donatti F., Villa A.E.P., Tetko I.V.* Geometrical approach to predict epileptical seizures in ten minutes interval from the EEG data. IFMBE Proceedings, 2nd Medical and biological Engineering Conference EMBEC 2002, p. 450-451.
3. *Дидук Н.Н.* Информационные пространства. Понятия собственной информации и неопределенности. Кибернетика. – 1986. – №4. – С. 74-80.
4. *Дидук Н.Н.* Теория неопределенности: назначение, первые результаты и перспективы. II. Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 5. – С. 165-173.
5. *Макаренко А.С.* Об одной мере упорядоченности режимов с обострением. – Деп. в УНИИНТИ. – №1504. – К.: 1988.
6. *Сагайдак Л.А.* Исследование и применение геометрических свойств сигналов и объектов: Дипломная работа. – КА-82, 2004. – Библиотека УНК ИПСА НТУУ "КПИ".
7. *Макаренко А.С., Сагайдак Л.А.* Вычисление информационного содержания данных на основе их симметрийного анализа. Проблемы управления и інформатики, 2007.