УДК 62.50, 681.3

Кондратенко В.Ю

Узагальнений алгоритм реалізації операцій нечіткої арифметики для множин з трикутною формою функцій належності

Результати досліджень, що наведені в даній статті, пов'язані з нечіткими множинами з трикутною формою функцій належності. Особливу увагу приділено синтезу аналітичних моделей результуючих функцій належності, що формуються при здійсненні таких операцій нечіткої арифметики: додавання, віднімання, множення, ділення. Крім того, в статті наведено узагальнений алгоритм для обчислювальних операцій нечіткої арифметики.

This paper deals with the investigations of fuzzy numbers with triangular membership functions. Special attention is paid to synthesis of analytic models of the membership functions for results of fuzzy arithmetic operations, including addition, subtraction, multiplication and division. Moreover, the general algorithm for an implementation of fuzzy arithmetic's operations is presented.

Вступ

Теорія нечітких множин останнім часом знаходить все більш широке застосування для розв'язку задач прийняття рішень та управління в умовах невизначеності [1-7, 10-12, 17, 18]. При цьому будь-яка нечітка множина $\underset{\sim}{A}$, що задана на універсальній множині E, є сукупністю пар $(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))$ [3,13], де $x \in E$, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$ – функція належності відповідного елемента x до нечіткої множини $\underset{\sim}{A}$. Відповідні обчислювальні алгоритми для реалізації операцій нечіткої арифметики, зокрема операцій додавання, віднімання, множення та ділення, формуються на основі застосування α-перерізів відповідних нечітких множин. Такі арифметичні операції [4, 13, 15, 16] мають високу обчислювальну складність, оскільки виконуються почергово для всіх рівнів $\alpha_i \in [0,\ 1]$, $i = 0,1,2,...,r$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_r = 1$ з відповідно обраним кроком дискретності $\Delta\alpha = \frac{1}{r}$, величина якого, враховуючи, що $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\alpha$, суттєво впливає, в першу чергу, на точність та швидкодію реалізації обчислювальних процедур [9]. При цьому α-перерізом нечіткої множини $\underset{\sim}{A} \in R$ є чітка (з точки зору умови $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha$) підмножина $A_\alpha \in R$, що містить елементи $x \in R$, ступінь належності яких до множини $\underset{\sim}{A}$ не менша зазначення α, тобто $A_\alpha = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$.

Якщо підмножини A_α та B_α визначають відповідні α- перерізи нечітких множин $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$, де $\alpha \in [0,\ 1]$, $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in R^+$, то їх можна подати таким чином:

$$A_\alpha = [a_1(\alpha),\ a_2(\alpha)],\ B_\alpha = [b_1(\alpha),\ b_2(\alpha)].$$

Алгоритми для реалізації вищезгаданих операцій нечіткої арифметики [4, 12, 14] мають у цьому випадку такий вигляд:

а) для операції додавання

$$A_\alpha(+)B_\alpha=[a_1(\alpha),\ a_2(\alpha)](+)[b_1(\alpha),\ b_2(\alpha)]=[a_1(\alpha)+b_1(\alpha),\ a_2(\alpha)+b_2(\alpha)];$$

б) для операції віднімання

$$A_\alpha(-)B_\alpha=[a_1(\alpha),\ a_2(\alpha)](-)[b_1(\alpha),\ b_2(\alpha)]=[a_1(\alpha)-b_2(\alpha),\ a_2(\alpha)-b_1(\alpha)];$$

в) для операції множення

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha=[a_1(\alpha),\ a_2(\alpha)](\cdot)[b_1(\alpha),\ b_2(\alpha)]=[a_1(\alpha)\cdot b_1(\alpha),\ a_2(\alpha)\cdot b_2(\alpha)];$$

г) для операції ділення

$$A_\alpha(:)B_\alpha=[a_1(\alpha),\ a_2(\alpha)]\ (:)\ [b_1(\alpha),\ b_2(\alpha)]=\left[\frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)},\ \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}\right].$$

Складність та швидкодія обчислень при отриманні результатів реалізації операцій нечіткої арифметики на основі вищезазначених α-перерізів A_α та B_α в більшості випадків залежать від наявності відповідних аналітичних моделей та форми функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ і $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ нечітких множин $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$.

Синтез аналітичних моделей для операцій нечіткої арифметики

Метою даної статті є синтез аналітичних моделей для результатів операцій нечіткої арифметики при використанні трикутної форми для формування відповідних функцій належності, які є найбільш поширеними при застосуванні теорії нечітких множин для проектування систем управління, систем підтримки прийняття рішень та інтелектуальних експертних систем [1, 2, 4, 10, 18]. Зокрема нечіткі числа $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$, функції належності яких $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ та $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ мають трикутну форму, можна навести у вигляді: $\underset{\sim}{A}=(a_1,a_0,a_2)$, та $\underset{\sim}{B}=(b_1,b_0,b_2)$, де $\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_0)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(b_0)=1$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_1)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(b_1)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_2)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(b_2)=0$.

Синтез аналітичних моделей результуючих функцій належності для операцій нечіткої арифметики здійснюється в подальшому на основі узагальнених моделей відповідних α-перерізів

$$A_\alpha=[a_1(\alpha),a_2(\alpha)]=[a_1+\alpha(a_0-a_1),a_2-\alpha(a_2-a_0)],$$

$$B_\alpha=[b_1(\alpha),\ b_2(\alpha)]=[b_1+\alpha(b_0-b_1),b_2-\alpha(b_2-b_0)]$$

та аналітичних моделей функцій належності трикутної форми $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ та $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}0,\forall(x\le a_1)\cup(x\ge a_2)\\ \dfrac{x-a_1}{a_0-a_1},\forall(a_1<x\le a_0)\\ \dfrac{a_2-x}{a_2-a_0},\forall(a_0<x<a_2)\end{cases},\qquad \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)=\begin{cases}0,\forall(y\le b_1)\cup(y\ge b_2)\\ \dfrac{y-b_1}{b_0-b_1},\forall(b_1<y\le b_0)\\ \dfrac{b_2-y}{b_2-a_0},\forall(b_0<y<b_2)\end{cases}.$$

В кожному з випадків реалізації тієї чи іншої операції нечіткої арифметики будемо формувати результуючу нечітку множину $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}(*)\underset{\sim}{B}$ з відповідною формою функції належності, де замість (*) може стояти позначення конкретної операції нечіткої арифметики: додавання $(+)$, віднімання $(-)$, множення $(\cdot)$ або ділення $(:)$.

Задача синтезу аналітичних моделей полягає в формуванні відповідних аналітичних залежностей, згідно з якими можна безпосередньо обчислювати значення результуючих функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z)$ відповідних нечітких множин $\underset{\sim}{C}$ на основі параметрів a_0,a_1,a_2 та b_0,b_1,b_2 нечітких трикутних чисел $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$.

Нижченаведені синтезовані автором [8, 9, 16] аналітичні моделі для результуючих функцій належності при здійсненні вищезазначених операцій нечіткої арифметики з урахуванням областей існування параметрів x, y, z.

Зокрема, для операції додавання $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(+)\underset{\sim}{B}$ аналітична модель може бути представлена у вигляді:
$\forall x, y, z \subset R$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z) = \begin{cases} 0, & \forall(z \le a_1 + b_1) \cup (z \ge a_2 + b_2) \\ \dfrac{z - a_1 - b_1}{a_0 + b_0 - a_1 - b_1}, & \forall(a_1 + b_1 < z \le a_0 + b_0) \\ \dfrac{a_2 + b_2 - z}{a_2 + b_2 - a_0 - b_0}, & \forall(a_0 + b_0 < z < a_2 + b_2) \end{cases}.$$

При відніманні нечітких множин $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$ аналітична модель рузультуючої нечіткої множини $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(-)\underset{\sim}{B}$ має такий вигляд:
$\forall x, y, z \subset R$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z) = \begin{cases} 0, & \forall(z \le a_1 - b_2) \cup (z \ge a_2 - b_1) \\ \dfrac{z - a_1 + b_2}{a_0 - b_0 - a_1 + b_2}, & \forall(a_1 - b_2 < z \le a_0 - b_0) \\ \dfrac{a_2 - b_1 - z}{a_2 - b_1 - a_0 + b_0}, & \forall(a_0 - b_0 < z < a_2 - b_1) \end{cases}.$$

Аналітична модель $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z)$ для операції ділення $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(:)\underset{\sim}{B}$ має такий вигляд:
$\forall x, y, z \subset R^+$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z) = \begin{cases} 0, & \forall\left(z \le \dfrac{a_1}{b_2}\right) \cup \left(z \ge \dfrac{a_2}{b_1}\right) \\ \dfrac{b_2 z - a_1}{(a_0 - a_1) - (b_0 - b_2)z}, & \forall\left(\dfrac{a_1}{b_2} < z \le \dfrac{a_0}{b_0}\right) \\ \dfrac{b_1 z - a_2}{(a_0 - a_2) - (b_0 - b_1)z}, & \forall\left(\dfrac{a_0}{b_0} < z \le \dfrac{a_2}{b_1}\right) \end{cases}.$$

Детальні дослідження арифметичних операцій над нечіткими числами трикутної форми показують, що результатом обчислення операцій додавання $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(+)\underset{\sim}{B}$ та віднімання $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(-)\underset{\sim}{B}$ є також нечіткі числа $\underset{\sim}{C}$ з трикутною формою функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z)$, а результатом обчислення нечіткої операції ділення – нечіткі числа з більш складною, в загальному випадку – нелінійною формою функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z)$.

Для нечіткої операції множення $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(\cdot)\underset{\sim}{B}$ синтезована аналітична модель результуючої функції належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z)$ має вигляд:
$\forall x, y, z \subset R^+$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z)=\begin{cases} 0, & \forall(z\le a_1b_1)\cup(z\ge a_2b_2) \\ \dfrac{-\left[(a_0-a_1)b_1+(b_0-b_1)a_1\right]+\sqrt{\left[(a_0-a_1)b_1-(b_0-b_1)a\right]^2+4(a_0-a_1)(b_0-b_1)z}}{2(a_0-a_1)(b_0-b_1)}, & \forall(a_1b_1<z\le a_0b_0) \\ \dfrac{-\left[(a_0-a_2)b_2+a_2(b_0-b_2)\right]-\sqrt{\left[(a_0-a_2)b_2-a_2(b_0-b_2)\right]^2+4(a_0-a_2)(b_0-b_2)z}}{2(a_0-a_2)(b_0-b_2)}, & \forall(a_0b_0<z<a_2b_2) \end{cases}$$

Результатом операції множення двох нечітких трикутних чисел, як і у випадку нечіткої операції ділення, є нечітка множина з функцією належності, яка не входить до сімейства нечітких трикутних чисел.

При використанні наведених аналітичних моделей суттєво скорочуються витрати часу та суттєво підвищується точність обчислювальних операцій.

Узагальнений алгоритм реалізації обчислювальних операцій нечіткої арифметики

Алгоритм побудови результуючої функції належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z)$ при здійсненні операцій нечіткої арифметики з нечіткими трикутними числами $\underset{\sim}{A}=(a_1,a_0,a_2)$ та $\underset{\sim}{B}=(b_1,b_0,b_2)$ являє собою таку покрокову послідовність обчислювального процесу (блок-схема алгоритму наведена на рис. 1):

Крок 1. Вводяться відповідні параметри a_1,a_0,a_2 та b_1,b_0,b_2 заданих нечітких трикутних чисел $\underset{\sim}{A}=(a_1,a_0,a_2)$, $\underset{\sim}{B}=(b_1,b_0,b_2)$.

Крок 2. Для виконання будь-якої операції нечіткої арифметики з множини {*Додавання, Віднімання, Множення, Ділення*} задається відповідний код операції з наступної множини кодів $cop=\{1,2,3,4\}$.

Крок 3. Вводиться число n, що відповідає необхідній кількості інтервалів, на які поділяється відповідний діапазон $[c_1,c_2]$ для здійснення відповідних обчислювальних операцій згідно з кодом cop.

Крок 4. Вводиться число m, що відповідає необхідній кількості інтервалів при здійсненні обчислювальних операцій при $z<c_1$ та $z>c_2$ (доцільно при побудові графіка функції належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z,cop)$).

Крок 5. На основі даних, наведених в табл. 1, обчислюються параметри $c_1(cop)$, $c_0(cop)$ та $c_2(cop)$ результуючої нечіткої множини $\underset{\sim}{C}(cop)$, згідно із зазначеним на *Кроці 2* коду операції cop.

Крок 6. Для здійснення обчислювальних операцій визначається крок дискретності Δz за умовою

$$\Delta z=\max\left\{\frac{c_2(cop)-c_1(cop)}{n},\Delta z_{\min}\right\},$$

де $\Delta z_{\min}$ – наперед задане мінімально доцільне значення кроку дискретності Δz, що забезпечує необхідний рівень швидкодії обчислювальних процесів.

Таблиця 1

Операція	**Код операції** (cop)	$c_1(cop)$	$c_0(cop)$	$c_2(cop)$
Додавання	1	a_1+b_1	a_0+b_0	a_2+b_2
Віднімання	2	a_1-b_2	a_0-b_0	a_2-b_1
Множення	3	a_1b_1	a_0b_0	a_2b_2
Ділення	4	a_1/b_2	a_0/b_0	a_2/b_1

Крок 7. Задаються початкові дані для організації циклу обчислень за параметром i, зокрема

$$i=0,$$
$$z=c_1(cop)-m\cdot\Delta z.$$

Крок 8. Перевіряється виконання умови $z<c_1(cop)$:
якщо умова $z<c_1(cop)$ виконується, то $\mu_{\tilde{C}}(z,cop)=0$ і необхідно переходити до *Кроку 11.* В іншому випадку, тобто при порушенні умови $z<c_1(cop)$, необхідно переходити до *Кроку 9.*

Крок 9. Перевіряється виконання умови $c_1(cop)\le z<c_0(cop)$:
якщо умова $c_1(cop)\le z<c_0(cop)$ виконується, то $\mu_{\tilde{C}}(z,cop)$ обчислюється згідно з відповідною формулою, наведеної в табл. 2 для конкретного коду операції (cop), і після

Таблиця 2

Код операції (cop)	**Позначення** $\mu_{\tilde{C}}(z,cop)$	**Формула для обчислення** $\mu_{\tilde{C}}(z,cop)$
1	$\mu_{\tilde{C}}(z,1)$	$\dfrac{z-a_1-b_1}{a_0+b_0-a_1-b_1}$
2	$\mu_{\tilde{C}}(z,2)$	$\dfrac{z-a_1+b_2}{a_0-b_0-a_1+b_2}$
3	$\mu_{\tilde{C}}(z,3)$	$-\dfrac{\left[(a_0-a_1)b_1+(b_0-b_1)a_1\right]}{2(a_0-a_1)(b_0-b_1)}+$ $+\dfrac{\sqrt{\left[(a_0-a_1)b_1-(b_0-b_1)a\right]^2+4(a_0-a_1)(b_0-b_1)z}}{2(a_0-a_1)(b_0-b_1)}$
4	$\mu_{\tilde{C}}(z,4)$	$\dfrac{b_2z-a_1}{(a_0-a_1)-(b_0-b_2)z}$

цього необхідно переходити до *Кроку 11.* В іншому випадку, тобто при порушенні умови $c_1(cop)\le z<c_0(cop)$, необхідно переходити до *Кроку 10.*

Крок 10. Перевіряється виконання умови $c_0(cop)\le z\le c_2(cop)$:
якщо умова $c_0(cop)\le z\le c_2(cop)$ виконується, то $\mu_{\tilde{C}}(z,cop)$ обчислюється згідно з відповідною формулою, наведеною в табл. 3 для конкретного коду операції (cop), і після цього необхідно переходити до *Кроку 11.* В іншому випадку, тобто при $z>c_2(cop)$, функція належності $\mu_{\tilde{C}}(z,cop)$ отримує значення $\mu_{\tilde{C}}(z,cop)=0$, і після цього також необхідно переходити до *Кроку 11.*

Крок 11. Нарощується параметр циклу:

$$i=i+1$$

та перевіряється виконання умови

$$i > (n + 2m),$$

якщо умова $i > (n + 2m)$ не виконується, то обчислюється нове значення параметра z:

$$z = z + \Delta z$$

і в подальшому необхідно переходити до *Кроку 8*. В іншому випадку, тобто при виконанні умови $i > (n + 2m)$, обчислювальний процес закінчується, оскільки результуюча функція належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, cop)$ буде повністю сформованою на всьому заданому діапазоні існування параметра z:

$$z \in \left[c_1(cop) - m \cdot \Delta z, \quad c_2(cop) + m \cdot \Delta z \right].$$

Таблиця 3

Код операції (cop)	**Позначення** $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, cop)$	**Формула для обчислення** $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, cop)$
1	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, 1)$	$\dfrac{a_2 + b_2 - z}{a_2 + b_2 - a_0 - b_0}$
2	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, 2)$	$\dfrac{a_2 - b_1 - z}{a_2 - b_1 - a_0 + b_0}$
3	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, 3)$	$-\dfrac{\left[(a_0 - a_2)b_2 + a_2(b_0 - b_2)\right]}{2(a_0 - a_2)(b_0 - b_2)} - \dfrac{\sqrt{\left[(a_0 - a_2)b_2 - a_2(b_0 - b_2)\right]^2 + 4(a_0 - a_2)(b_0 - b_2)z}}{2(a_0 - a_2)(b_0 - b_2)}$
4	$\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, 4)$	$\dfrac{b_1 z - a_2}{(a_0 - a_2) - (b_0 - b_1)z}$

Результати моделювання підтверджують ефективність розроблених аналітичних моделей при здійсненні операцій нечіткої арифметики з нечіткими трикутними числами. Для двох нечітких чисел $\underset{\sim}{A} = (a_1, a_0, a_2)$ та $\underset{\sim}{B} = (b_1, b_0, b_2)$, наведених на рис. 2, результати реалізації алгоритму (рис. 2) для різних кодів операцій $cop = \{1, 2, 3, 4\}$ наведені на рис. 3-6.

При цьому параметри $c_1(cop)$, $c_0(cop)$ та $c_2(cop)$результуючих функцій належності (згідно з табл. 1) для здійснення операцій нечіткої арифметики наведені в табл. 4. В Таблиця 4 також містить значення кроку обчислень $\Delta z(cop)$ при $n = 500; m = 20; \Delta z_{\min} = 0,01$.

Висновок

Використання розроблених і представлених в даній статті аналітичних моделей, покладених в основу реалізації алгоритму (рис.1), для побудови результуючих функцій належності $\mu_{\underset{\sim}{C}}(z, cop)$ дозволяє суттєво скоротити витрати часу та підвищити точність обчислювальних процесів при здійсненні операцій нечіткої арифметики. Наведені математичні моделі забезпечують обчислення результуючих нечітких множин $\underset{\sim}{C}$ безпосередньо на основі параметрів (a_1, a_0, a_2) та (b_1, b_0, b_2) відповідних нечітких множин $\underset{\sim}{A}$ та $\underset{\sim}{B}$, над якими здійснюються операції нечіткої арифметики. В подальшому доцільним є проведення досліджень, пов'язаних із синтезом аналітичних моделей результуючих функцій належності для операцій $\min(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$ та $\max(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$.

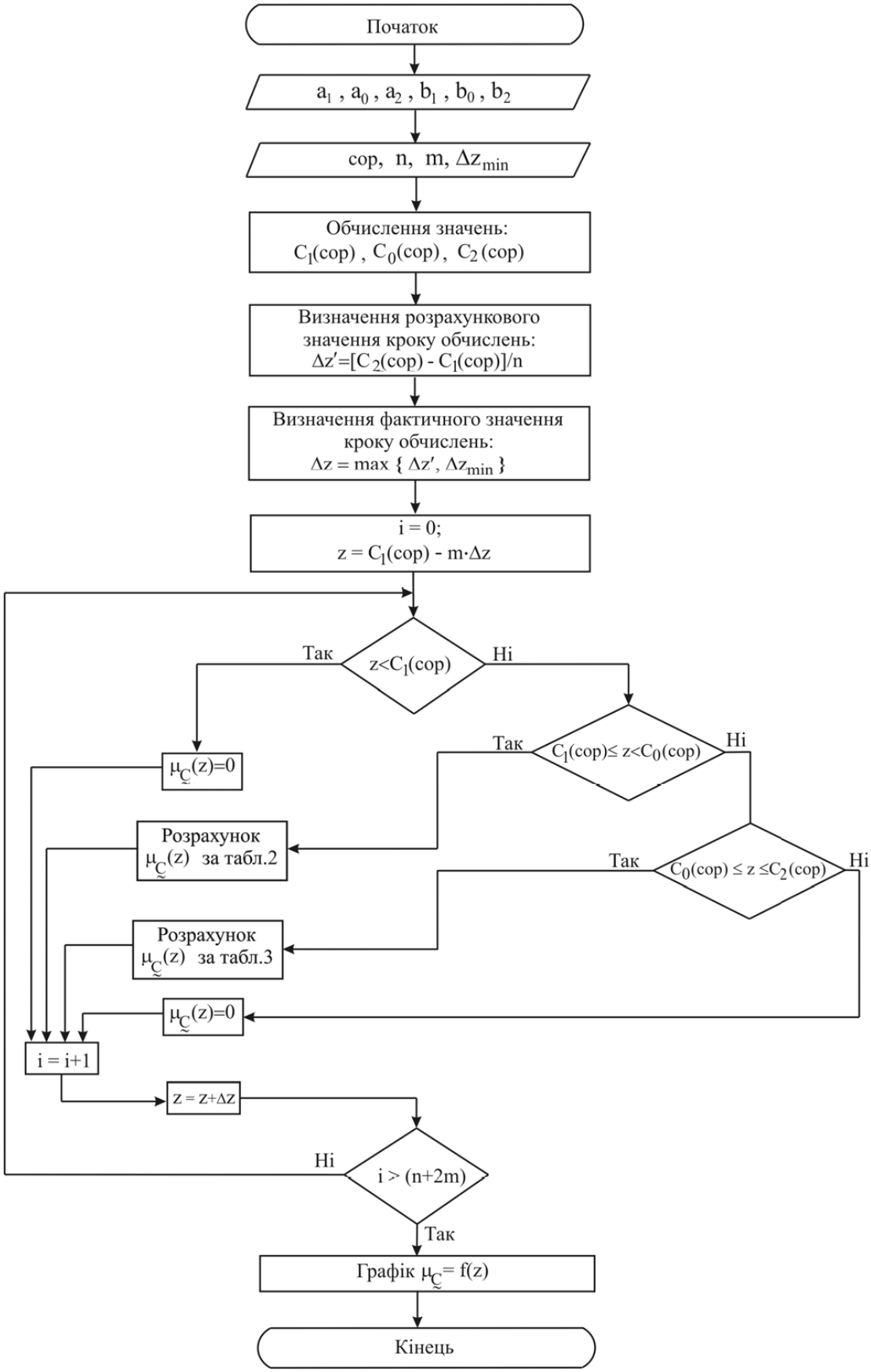

Рис. 1. Блок-схема алгоритму для автоматизації обчислювальних операцій нечіткої арифметики

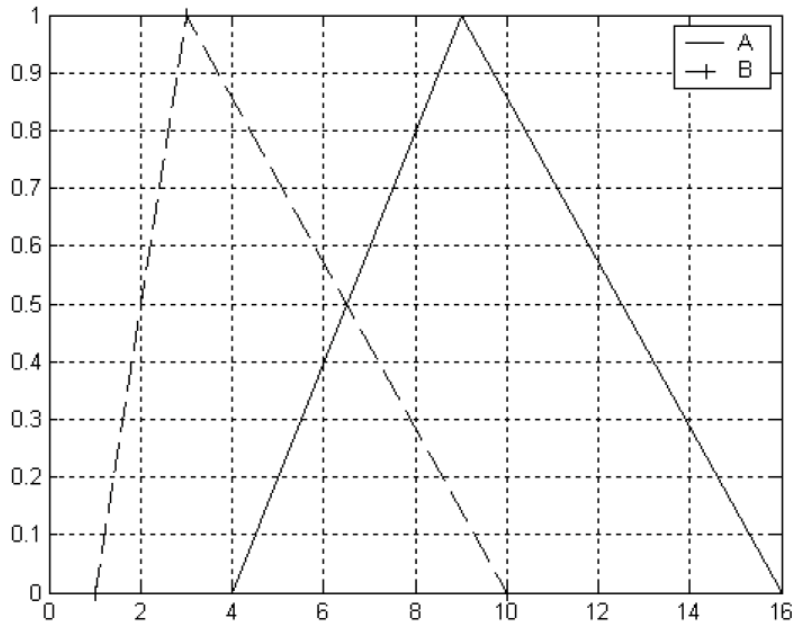

Рис. 2. Нечіткі числа $\underset{\sim}{A} = (4,9,16)$ та $\underset{\sim}{B} = (1,3,10)$ з трикутною формою функцій належності

Таблиця 4

cop	$\underset{\sim}{A} = (a_1, a_0, a_2)$	$\underset{\sim}{B} = (b_1, b_0, b_2)$	$c_1(cop)$	$c_0(cop)$	$c_2(cop)$	Δz
1	(4, 9, 16)	(1, 3, 10)	5	12	26	0,042
2	(4, 9, 16)	(1, 3, 10)	– 6	6	15	0,042
3	(4, 9, 16)	(1, 3, 10)	4	27	160	0,312
4	(4, 9, 16)	(1, 3, 10)	0,4	3	16	0,0312

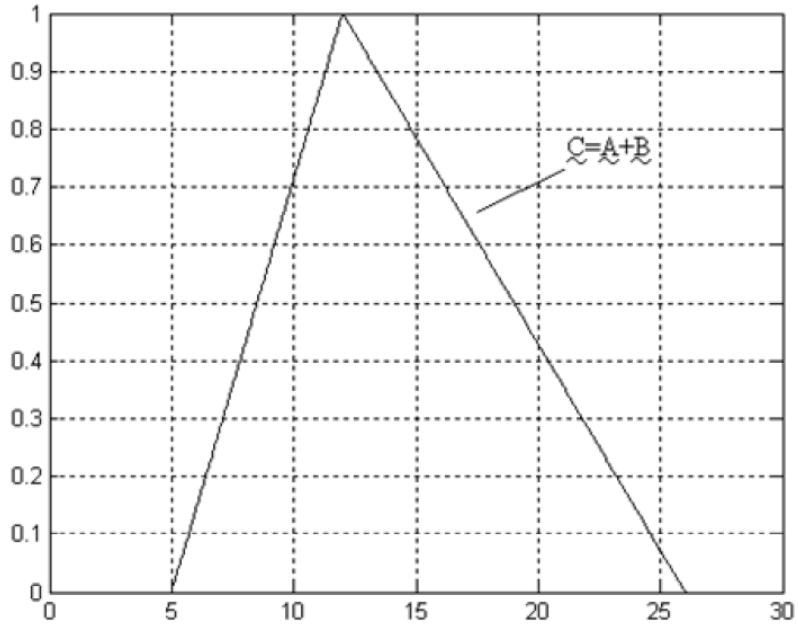

Рис. 3. Результуюча нечітка множина $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(+)\underset{\sim}{B}$ з трикутною формою функції належності

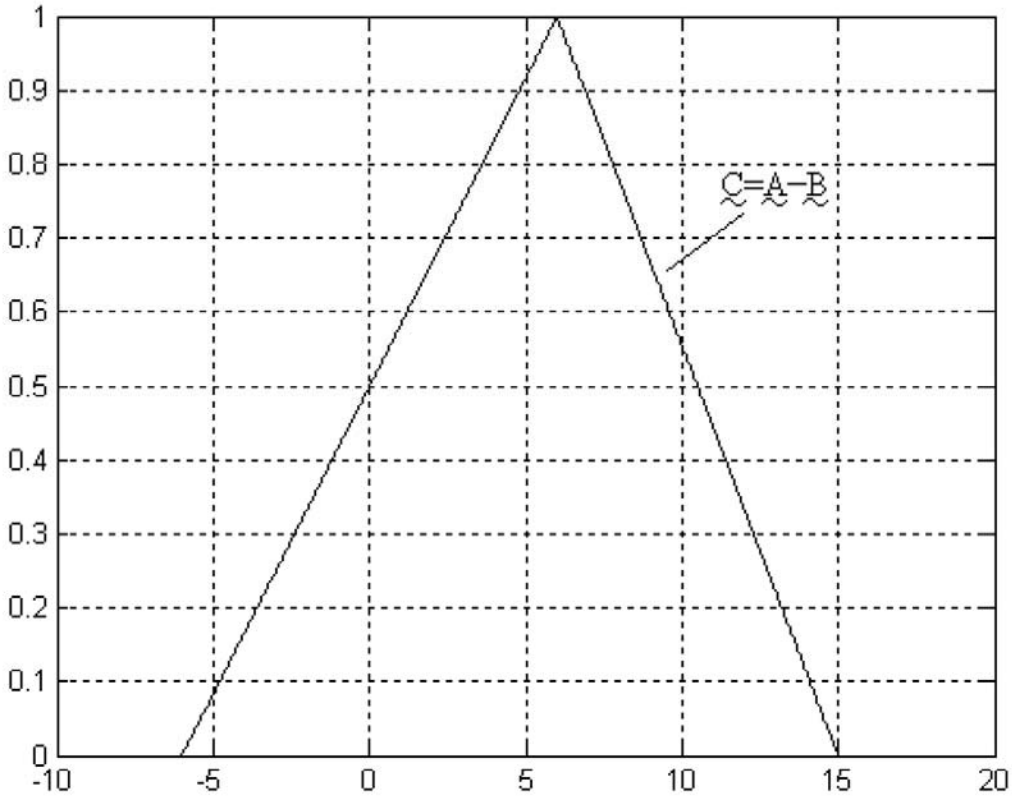

Рис. 4. Результуюча нечітка множина $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(-)\underset{\sim}{B}$ з трикутною формою функції належності

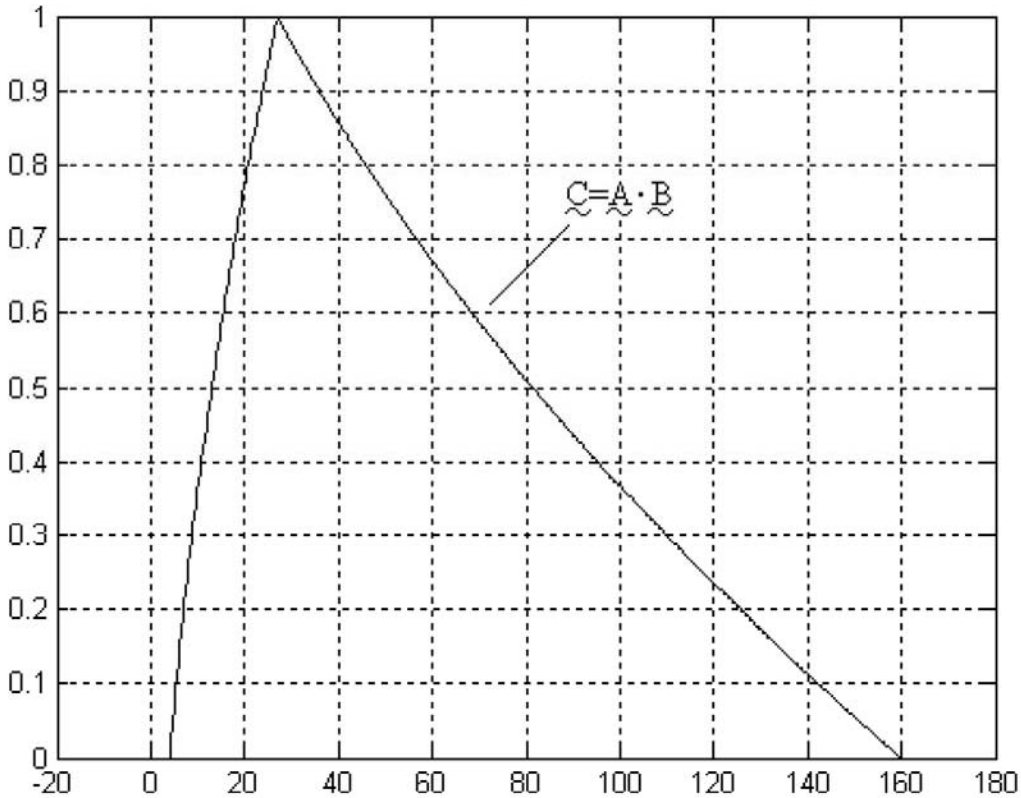

Рис. 5. Результуюча нечітка множина $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(\cdot)\underset{\sim}{B}$

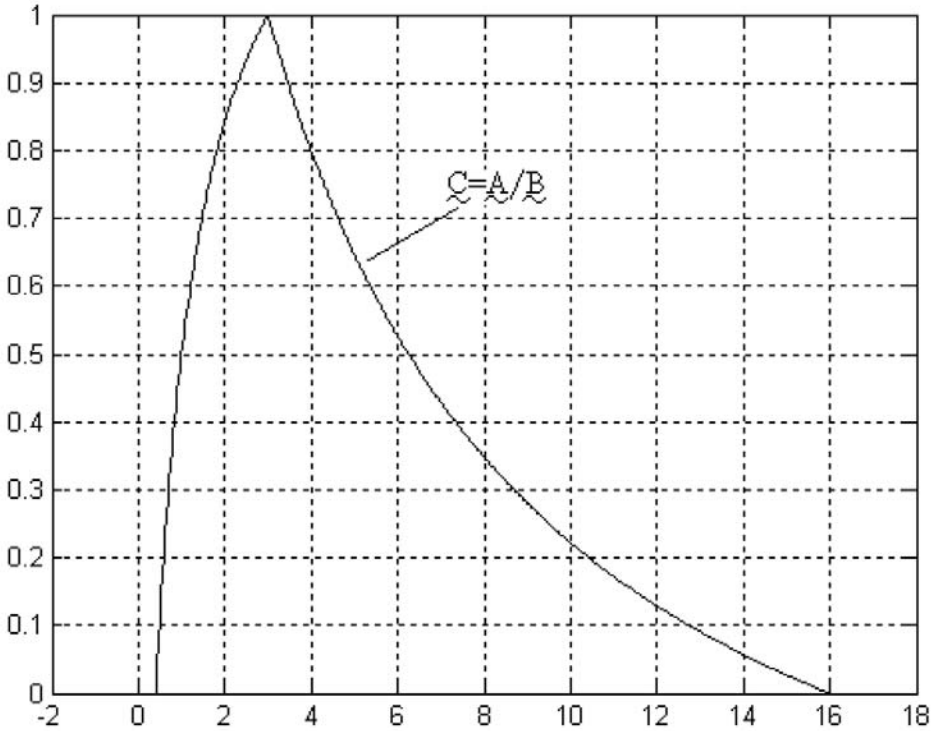

Рис. 6. Результуюча нечітка множина $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}(:)\underset{\sim}{B}$

Література

1. Архангельский В.И., Богаенко И.Н., Грабовский Г.Г., Рюмшин Н.А. Системы фуцци-управления. К.: Техніка, 1997. – 208 с.
2. Балан С.А., Становская Т.П., Становский А.Л. Проектирование и управление в машиноведении. – Одесса: Астропринт, 2002. – 376 с.
3. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях.// Вопросы анализа и процедуры принятия решений: Сб. пер.- М.: Мир, 1976. – С. 172-215.
4. Герасимов Б.М., Грабовский Г.Г., Рюмшин Н.А. Нечеткие множества в задачах проектирования, управления и обработки информации. - К.: Техніка, 2002. – 140 с.
5. Глибовець М.М., Олецький О.В. Штучний інтелект. – К.: Видавничий дім "КМ Академія", 2002. – 366 с.
6. Зайченко Ю.П. Основи проектування інтелектуальних систем. – К.: Видавничий дім "Слово", 2004. – 352 с.
7. Коваленко И.И., Гожий А.П. Методы и средства поддержки принятия решений. – Николаев, 2005. – 104 с.
8. Кондратенко В.Ю. Аналіз властивостей та математична модель результуючої функції належності операції множення нечітких чисел// Вісник ХНТУ.- №1(24). – Херсон: ХНТУ, 2006. – С. 488-494.
9. Кондратенко В.Ю. Аналітичні моделі результуючих функцій належності для автоматизації обчислювальних процесів з нечіткими множинами: операція ділення. Наукові праці МДГУ ім. Петра Могили.- Серія: Комп'ютерні технології.- Том 57.-, Випуск 44. – Миколаїв: МДГУ, 2006. – С.81-91.
10. Кофман А., Хил Алуха Х. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями/ Пер с исп. – Минск: Вышэйшая школа, 1992. – 224 с.
11. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій. – Миколаїв: МДГУ ім.Петра Могили, 2003. – 260 с.
12. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 312 с.
13. Новак В., Перфильева И., Мочкорж И. Математические принципы нечеткой логики / Пер. с англ.; Под ред. А.Н Аверкина–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 352 с.
14. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: Нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: "Універсум-Вінниця", 1999. – 320 с.
15. Kaufmann A., Gupta. M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1985. - 351 p.
16. Kondratenko V. Fuzzy Arithmetic Analytic Models For Triangular Uncertain Numbers. 77th Annual Meeting of the Gessellschaft fur Angewante Mathematik und Mechanik e.V., GAMM'2006. Book of Abstracts. – Berlin: Technische Universitat, 2006. – 523 p.
17. Kosko B. Heaven in a Chip: Fuzzy Visions of Society and Science in the Digital Age. New York: Three Rivers Press, 2000. – 354 p.
18. Lewis F.L., Campos J., Selmic R. Neuro-Fuzzy Control of Industrial Systems with Actuator Nonlinearities (Frontiers in Applied Mathematics). – Philadelphia, PA: SIAM, 2002. – 244 p.