УДК 681.5.037.24:681.5.037.5

Трунов О.М.

# Застосування методу рекурентної апроксимації до задач визначення стійкості САУ

*Досліджено можливості визначення критерію стійкості за допомогою прямого аналізу коренів, що подано алгебраїчними рекурентними співвідношеннями. Подані приклади таких критеріїв. Продемонстровано для САУ третього порядку їх співпадання із критерієм Гурвіца. Доведена теорема, що узагальнює критерій стійкості. Виведено умови, що визначають граничний коефіцієнт та запас стійкості.*

*Possibilities of durability criterion determination were investigated with the help of the forward root analysis in algebraic recurrence relations. The examples of such criteria are given. The coincidence for automatic control system of third degree with number Gurvica was represented. The theorem of durability criterion extension was proved. Conditions were derived, which determinate the boundary coefficient and durability reserve.*

Загальною задачею, що виникає при проектуванні системи автоматичного управління (САУ) [1-2] на базі класичних лінійних законів керування, а саме пропорційного (П), інтегрального (І), діференціального (Д) та їх довільних комбінацій є задача аналізу стійкості, що здійснюється за допомогою різноманітних крітеріїв. Не зважаючи на їх велику кількість та різноманітність, їх можливо поділити на дві групи – прямі та опосередковані. Застосування опосередкованих критеріїв, таких, як критерій Гурвіца, Рауса, Льєнара – Шипара, Михайлова [3-4], з одного боку, утворює ускладнення, що зумовлені необхідністю у процесі обчислень враховувати особливості матриці, а саме виродження (обертання в нуль) її проміжних визначників, робить обчислювальні алгоритми та програму, що її реалізує, громіздкою та складною, а з іншого боку, тільки визначає властивості системи, що вже спроетована. Застосування прямих методів стримується необхідністю пошуку коренів нелінійних алгебраїчних рівнянь, аналітичний розв'язок яких довгий час обмежувався рівнем математичних знань. Однак привабливість можливостей, що відкривають критерії цього типу для розв'язку задач сінтезу, робить задачу аналітичного розв'язку нелінійних алгебраїчних рівнянь актуальною та визначає її як *головну нерозв'зану проблему*.

Одним з ефективних методів, що досліджується останнім часом, є метод рекурентної апроксимації (МРА) [3]. Однак, незважаючи на те, що у роботах [5, 6] наведено теоретичне дослідження збіжності та монотонності методу, головною проблемою, яка не вивчалась, є:

Встановлення зв'язку між властивостями коренів та властивостями рівнянь.

*Головною метою* данної роботи є встановлення зв'язку між властивостями коренів і властивостями рівнянь та сформулювати прямий критерій стійкості лінійної САУ.

Для прозорості викладу особливостей існуючих підходів розглянемо лінійну САУ, динаміка якої описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 f_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 f_1 \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n f_1 \end{cases}, \tag{1}$$

де $x_1$, $x$, $x_3$ – координати, що характеризують поведінку системи. Перепишемо скорочено цю систему у матричній формі:

$$\frac{dX}{dt} = AX + Bf,$$

увівши квадратну матрицю коефіцієнтів $n$-го порядку:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

та матрицю-стовпчик коефіцієнтів:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

і вектор-стовпчик координат системи:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$n$-го порядку.

Розглянемо однорідну, систему оскільки, спираючись на висновки О.М. Ляпунова, стійкість лінійних систем не залежить від зовнішніх збурень, а визначається розв'язком однорідної системи:

$$\frac{dX}{dt} = AX\,. \tag{4}$$

Для того щоб розв'язок (4) був асимптотично стійким, необхідно і достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння системи мали від'ємні дійсні частини, тобто знаходились зліва від уявної осі на площині комплексного λ:

$$|A - \lambda E| = 0\,, \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \tag{6}$$

де $E$ – одинична матриця

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}..$$

Розкривши визначник (6), за відомими правилами запишемо характеристичне рівняння

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{7}$$

Подальший аналіз здійснюється або шляхом застосування будь-якого критерію стійкості, або шляхом безпосереднього обчислення коренів.

Усі відомі критерії дослідження стійкості (критерій Гурвіца, Рауса, Льєнара – Шипара, Михайлова) були сформульовані набагато раніше за виникнення будь-яких обчислювальних машин. Тому у 70-80 роках відбувся їх подальший порівняльний аналіз та модифікація з погляду їх адаптації застосовності до реалізації на ЕОМ.

У даній роботі зупинимось на другому підході до аналізу стійкості, що пов'язаний з безпосереднім визначенням коренів рівняння (7).

Ця група методів пов'язана з ітераційними алгоритмами розв'язку алгебраїчних рівнянь. Найбільш розповсюдженим є метод Ньютона. Зупинимось на викладі його змісту.

Нехай треба знайти корені рівняння:

$$f(x) = 0$$

на проміжку $[a,b]$ за умов існування одного кореня, а похідна не має коренів на цьому інтервалі.

Розкладаючи функцію $f(x)$ у ряд Тейлора у околі точки $\lambda_0$, обмежившись двома членами ряду, отримаємо

$$f(x) = f(\lambda_0) + f'(\lambda_0)(x - \lambda_0).$$

Якщо $\lambda$ – корінь, то $f(\lambda) = 0$, а

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{f(\lambda_0)}{f'(\lambda_0)}.$$

Подальше обчислення здійснюється за рекурентним співвідношенням

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}.$$

Цей процес характеризується квадратичною збіжністю, але головною перешкодою його застосовності є обмеження на величину похідної на проміжку $[a,b]$.

Тепер розглянемо метод рекурентної апроксимації як такий, що позбавлений цієї перешкоди [5,6]. У зв'язку з цим детально продемонструємо застосовність методу для визначення коренів на проміжку $[a,b]$. Також розкладемо $f(\lambda)$ у ряд відповідно до методу рекурентної апроксимації

$$f(\lambda) = f(\lambda_0) + \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial^k f(\lambda)}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}\Delta_n}{k!}.$$

Останнє перепишеться з урахуванням того, що $f(\lambda)$ є поліном, наступним чином

$$f(\lambda) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\lambda_N^l + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\Delta\lambda_N \Delta\lambda_{N-1}^{k-1}}{k!},$$

де $b_k = \sum_{l=0}^{k} a_{n-l}\, \lambda_N^{l-k} \prod_{j=1}^{k} (l - j + 1)$;

$$f(\lambda_{N+1}) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\lambda_N^k + \Delta\lambda_N \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\lambda_{N-1}^{k-1}}{k!} \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\lambda_N^{l-k} \prod_{j=1}^{k} (l - j + 1)\ ^{*)} \tag{8}$$

*) Слід зауважити, що множник перед $\lambda_N^{l-k}$ дорівнює нулю у випадку, коли його показник степеня $l - k$ набуває від'ємних значень.

Аналіз виразу наближення для $\Delta\lambda_N$ на кожному кроці апроксимації

$$\Delta\lambda_N = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}\lambda_N^k}{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\Delta\lambda_{N-1}^{k-1}}{k!}\sum\limits_{l=0}^{n} a_{n-l}\lambda_N^{l-k}\prod\limits_{j=1}^{k}(l-j+1)},$$

відкриває за визначених умов по відношенню до знаків чисельника та знаменника можливості визначення знаку приросту $\Delta\lambda_N$. Тоді, якщо початкове наближення $\lambda_0$ на верхній границі інтервалу дійсної частини значень $\lambda$, що визначаються умовами стійкості системи, обрати за нульб, то умова від'ємності $\Delta\lambda_N$ для всіх $N$ буде умовою стійкості.

Подамо декілька прикладів практичного визначення $\Delta\lambda_N$. Розглянемо нульове наближення $\lambda_0 = 0$ та визначимо в його околі $\Delta\lambda_1$ за лінійною апроксимацією і лінійною схемою наближення

$$\Delta\lambda_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}} = -1\Big/\left[\frac{a_{n-1}}{a_n}\right]$$

Тоді, обмежуючись розкладом, у тричленний ряд подамо

$$\Delta\lambda_2 = -\frac{a_n}{a_{n-1} - a_{n-2}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}} = -1\Big/\left[\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right],$$

Або, не обмежуючи кількість членів у розкладі,

$$\Delta\lambda_2 = -\frac{a_n}{a_{n-1} + \sum\limits_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}\dfrac{a_{n-2-k}a_n^{k+1}}{a_{n-1}^{k+1}}},$$

або

$$\Delta\lambda_2 = -1\Big/\left[\frac{a_{n-1}}{a_n} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}\frac{a_{n-2-k}a_n^{k}}{a_{n-1}^{k+1}}\right].$$

Далі за цією схемою подамо $N$-ненаближення $\Delta\lambda_N$

$$\Delta\lambda_N = -1\Big/\left[\frac{a_{n-1}}{a_n} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{a_{n-2-k}}{a_n}\Delta\lambda_{N-1}^{k+1}\right] = -1\Big/\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-1-k}}{a_n}\Delta\lambda_{N-1}^{k}\right]. \quad *$$

З іншого боку, за тих же умов для початкового наближення $\lambda_1 = 0$, $\Delta\lambda_1$ може бути визначене, виходячи з параболічної апроксимації і квадратичної схеми наближення [5,6]

$$\Delta\lambda_1 = -\frac{a_{n-1}}{2a_{n-2}} \pm \sqrt{\frac{(a_{n-1})^2}{(2a_{n-2})^2} - \frac{a_n}{a_{n-2}}}.$$

Тоді $\Delta\lambda_2$ відповідно скориставшись $\Delta\lambda_1$ отримаємо

$$\Delta\lambda_2 = -\frac{a_{n-1}}{c_{nN}} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{c_{nN}^2} - \frac{2a_n}{c_{nN}}},$$

де $c_{nN} = 2\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_N^k a_{n-2-k}$.

Таким чином, аналіз умов від'ємності $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ свідчить, незалежно від схеми

---

*) умовно $0! = 1$

обрахунку $\Delta\lambda$, якщо виконується умова $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 0,\ \ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} > 0,\ \ a_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-2} > 0$, то корені від'ємні, а система є стійкою, або якщо $a_i > 0,\ \ i = \overline{1,\ \ 2,\ \ ...,\ \ n}$.

Таким чином, аналіз умов стійкості свідчить: якщо перше наближення кореня узято довільно на границі проміжку значень $\lambda_0 = 0$, то за певних умов та співвідношень між коефіцієнтами $\Delta\lambda_1$ або $\Delta\lambda_2$, $\Delta\lambda_N$ набуває тільки від'ємних значень, а це свідчить, що корені мають значення, що лежать у межах проміжку $[-\infty,0]$, а значить виконуються умови стійкості САУ.

*Теорема.* Якщо ряд $\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}\frac{a_{n-2-k}a_n^k}{a_{n-1}^k} > 0$ укладений з коефіцієнтів характеристичного поліному та $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 0$ є додатньо визначеними, то САУ є стійкою.

*Доведення.* Припустімо, що виконані умови теореми. Тоді $\Delta\lambda_N$ обчислені за лінійною або квадратичною схемою наближення у околі нуля є від'ємними числами $-|a|$.

Звідси корені є від'ємними, оскільки

$$\lambda_N = \lambda_0 - \Delta\lambda_N = 0 - |a| = -|a|.$$

Всі інші корені, що будуть обраховані для наступних наближень $\lambda_i < -|a|$, також будуть від'ємними.

Тепер розглянемо додатні наближення $\lambda_0 \in [0,+\infty]$.

Нехай $\lambda_0 = \infty$, за умов, якщо корінь $\lambda_i \notin [0,\infty]$ $|\Delta\lambda_N| > \lambda_0$.

Обрахуємо $\Delta\lambda_N$ за умов $\lambda_0 = \infty$.

$$\Delta\lambda_N = -\frac{\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\lambda_N^l}{\sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta\lambda_{N-1}^{k-1}}{k!}\sum_{l=0}^{n}(l-k+1)!\,a_{n-l}\lambda_N^{l-k}}.$$

Оскільки $a_1 << \infty,\ \ i = \overline{1,\ \ 2,\ \ ...,\ \ n}$, то після розкриття невизначеності за правилом Лопіталя отримаємо $\Delta\lambda_1 = -\infty$ за цих умов обрахуємо наближене значення кореня

$$\lambda_i = \infty - \infty = 0,$$

а далі, обраховуючи $\Delta\lambda_2$ у околі $\lambda_i = 0$ отримаємо, що у зв'язку з виконанням умов теореми $\Delta\lambda_1 = -|a|$, тобто нове наближення кореню належить проміжку від'ємних чисел. Таким чином, за будь-яких значень початкових наближень значення кореня належить проміжку від'ємних чисел.

Граничний коефіцієнт підсилення системи

У роботах [3,4] продемонстровано вплив коефіцієнта підсилення системи на похибку та стійкість системи управління. Визначимо граничний коефіцієнт підсилення як такий, що відповідає границі стійкості.

Розглянемо для прикладу відслідковуючу систему, що має передаточну функцію у розімкненому стані

$$K_P(p) = \frac{D(p)}{F(p)};$$

тоді у замкненому стані передаточна функція перетворюється до вигляду

$$K_З(p) = \frac{D(p)}{F(p)+D(p)}. \tag{9}$$

Розглянемо випадок, коли управління пропорційне сигналу з коефіцієнтом підсилення $K_P$, його перетворення Лапласа має вигляд $D(p) = K_P$.

Таким чином у загальному вигляді подамо (9).

$$K_З(p) = \frac{k_P}{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} p^k + k_P}.$$

Визначимо умови стійкості такими, за яких знаменник набуває значення нуля. Пошук коренів здійснимо за методом рекурентної апроксимації. Скориставшись лінійною схемою розкладу визначимо $\Delta\lambda_1$

$$\Delta\lambda_1 = -\frac{a_n + k_P}{a_{n-1}}.$$

Оскільки при послідовному визначенні коренів у другому наближенні маємо

$$\Delta\lambda_2 = -\frac{a_n + k_P}{a_{n-1} - a_{n-2}\left(\frac{a_n + k_P}{a_{n-1}}\right) + a_{n-3}\left(\frac{a_n + k_P}{a_{n-1}}\right)^2 + \ldots + a_{n-k}(-1)^{k-1}\left(\frac{a_n + k_P}{a_{n-1}}\right)^{k-1}},$$

або

$$\Delta\lambda_2 = -\frac{a_n + k_P}{a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} a_{n-k}\left(\frac{a_n + k_P}{a_{n-1}}\right)^{k-1}},$$

звідси умова стійкості, що полягає у від'ємності коренів транспонується

$$\Delta\lambda_1 \geq \Delta\lambda_2.$$

Остання еквівалентна

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} a_{n-k}\left(\frac{a_n + k_P}{a_{n-1}}\right)^{k-1} \leq 0. \qquad (10)$$

Продемонструємо, що для рівняння третього порядку умова (10) співпадає з умовою стійкості Гурвіца при позитивних коефіцієнтах [4].

Так, поклавши $n = 3$, $k_P = 0$, перетворимо (10)

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

що, безумовно, співпадає при $a_0 > 0$ з умовою Гурвіца

$$\begin{aligned} &a_0 > 0 \\ &\Delta_1 = a_1 > 0 \\ &\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{aligned}.$$

Таким чином, умова стійкості, визначена за методом рекурентної апроксимації для кожного випадку, співпадає з умовою Гурвіца.

Граничний коефіцієнт підсилення системи визначимо з умови (10)

$$k_{Pгг} = \frac{a_1 a_2}{a_0} - a_4.$$

Коефіцієнт запасу стійкості по підсиленню σ, що є відношенням граничного коефіцієнта підсилення розімкненої системи до коефіцієнта підсилення системи

$$\sigma = \frac{k_{Pгг}}{k_P} = \frac{1}{k_P}\left[\frac{a_1 a_2}{a_0} - a_4\right].$$

Таким чином, за допомогою критерію стійкості (10), утвореного виходячи із прямого визначення коренів, порівняно легко досліджувати стійкість систем. Виходячи з прозорого представлення коренів, що здійснено за допомогою метода рекурентної апроксимації, такий аналіз дозволяє простежити вплив на запас стійкості параметрів системи.

**Висновки**

1. Критерій стійкості, що виведено за допомогою методу рекурентної апроксимації, пов'язує аналітичною залежністю властивості системи та однозначно визначає умову стійкості.
2. Запас стійкості, граничний коефіцієнт підсилення, властивості системи пов'язані між собою аналітичним співвідношенням, що виведено за допомогою методу рекурентної апроксимації.

## Література

1. Александров А.Г. Синтез регуляторов много-мерных систем М.: «Машиностроение», 1986. – С. 272.
2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы М.: «Высшая школа», 1989. – С. 263.
3. Воронов А.А. Теория автоматического управления . – ч.1. – М.: Высшая школа, 1977. – С. 303.
4. Зайцев Г.Ф.Теория автоматического управления и регулирования. К.: Вища школа, 1975. – С. 422.
5. Трунов А.Н. Применение метода рекуррентной аппроксимации к решению нелинейных задач. – Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса: Сб.науч.тр. – Вып. 16. – М., МГОПУ, 1998. – С. 142-156.
6. Трунов О.М. Застосування методу рекурентної апроксимації до розв'язку нелінійних задач.// Зб. науков. праць МФ НаУКМА.-Миколаїв, 1999. – С. 135-142.
7. Трунов О.М. Особливості синтезу регуляторів на базі розв'язку задачі адекватного наближення моделі ISSN1609-7742// Наукові праці Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили: Науково-методичний журнал. – Т.. 57. – Випуск 44, 2006. – С.174-180.