УДК 519.5

Дегтярьов В.О.

Використання алгоритму FDP для вирішення задачі проектування мережі комунікацій в двовимірному просторі

В даній статті розглядається можливість використання алгоритму FDP для вирішення задачі оптимального трасування комунікацій у двовимірному просторі. Проводиться аналіз часової та ємнісної складності, пропонується можлива реалізація алгоритму, наводяться тестові приклади.

The article examined the possibility of using FDP algorithm for optimal communications routing problem solving in planar space. The analysis of time and space complexity of the algorithm is done, the possible implementation of the algorithm with test samples is provided.

У загальному випадку задача проектування полягає у створенні об'єкта, який повинен мати певні характеристики та відповідати заданим умовам. Задачі проектування розділяють на задачі синтезу і аналізу. Синтез називають оптимізацією, якщо під час проектування визначають найкращу в заданому розумінні структуру та значення параметрів системи [1].

Задачі прокладення комунікацій належать до задач структурно-параметричного синтезу, які мають на меті: удосконалення структури мережі комунікацій для зменшення її сумарної довжини чи вартості; знаходження такого набору параметрів мережі комунікацій, щоб вона відповідала різноманітним нормам проектування.

В даній роботі розглядається оптимізаційна задача знаходження найкоротшої мережі комунікацій між множиною точок (терміналів) в двовимірному просторі. Кожен термінал задається декартовими координатами. Мережа комунікацій складається з елементів (прямих ліній), які можуть поєднуватися не лише в терміналах, але і в додаткових точках простору. Для відповідності технологічним нормам вводиться додаткова умова про те, що елементи мережі комунікацій можуть бути розташовані в робочому просторі строго вертикально чи горизонтально. Необхідно знайти таку структуру мережі, яка відповідала б умові мінімізації її сумарної довжини.

В такій постановці задача зводиться до прямолінійної задачі Штейнера. В загальному випадку дана задача є NP повною [2,3], тобто неможливо вирішити задачу для кількості терміналів $n \to \infty$ за скінчений час. Вперше прямолінійна задача Штейнера була поставлена Хененом в 1966 році [4]. Він запропонував звузити область пошуку рішення до так званого сіткового графу, який отримується перетином горизонтальних та вертикальних ліній, проведених через кожен термінал.

В 1976 році Гван [5] дав характеристику повних дерев (топологій) Штейнера (Full Steiner Tree - FST) і довів, що найкоротше дерево Штейнера має складатися з поєднання повних дерев. Повним деревом він назвав таку топологію, в якій кожен термінал є листом, а ребра з'єднуються в спеціальних вершинах (точках Штейнера), кожна з яких поєднує рівно три ребра. Він довів, що повні дерева Штейнера можуть мати тільки дві можливі топології (рис. 2).

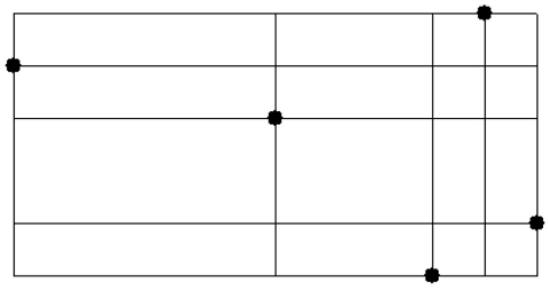

Рис. 1. Сітковий граф Хенена для множини з п'яти терміналів

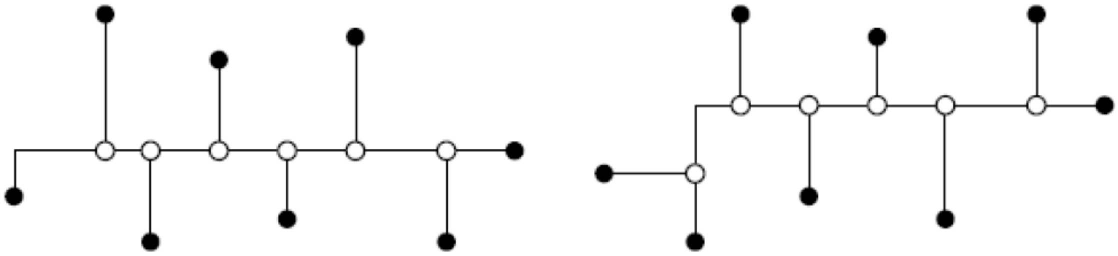

Рис.2. Можливі топології повних дерев Штейнера

Цей результат дав можливість вперше створити алгоритми що використовують FST генератори для вирішення задачі. Одним з таких алгоритмів є алгоритм FDP (FullSet Dynamic Programming). На рис. 3 наведено п'ять основних кроків алгоритму:

(1) For $m = 2$ to $|T|$
(2) For all $S \subseteq T$ such that $|S| = m$
(3) $\ell[S] = \|H(S)\|$
(4) For all A, B such that $A \otimes B = S$
(5) $\ell[S] = \min\{\ell[S], \ell[A] + \ell[B]\}$

Рис. 3. Послідовність кроків алгоритму FDP

В даному алгоритмі T – множина терміналів; $|T|$ – кількість терміналів в множині T; S – підмножина множини T; $\|H(S)\|$ – сумарна довжина FST для множини терміналів *S*. При цьому

$$A \otimes B = S \equiv \begin{cases} A \cup B = S \\ A \cap B = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

На першому кроці алгоритму визначається розмір підмножин m, які розглядаються далі. На другому кроці визначається перелік підмножин S, що мають розмір m. Далі визначається найкоротша довжина повного дерева для множини S. Четвертий крок визначає перелік підмножин S, для яких виконується умова (1). Довжина мережі для даної множини перераховується, якщо для підмножин A та B сума довжин FST є меншою за довжину FST для S.

Оскільки розрахунок починається з підмножин T найменшого розміру (m = 2), то на подальших кроках (m > 2) при декомпозиції в кроці алгоритму 4, використовуються вже розраховані структури даних топологій меншої розмірності. На другому та четвертому кроках використовуються генератори усіх підмножин, засновані на n-арних лічильниках, де n – розмір підмножини.

Практична реалізація алгоритму була виконана мовою C++ в середовищі MS Visual Studio 6.0. Логіка алгоритму реалізована у вигляді основних 9 класів, графічний інтерфейс у вигляді стандартного MFC application. Взаємозв'язок між класами в проекті наведено на рис.4. Дана діаграма, розроблена за допомогою CASE засобу Rational Rose.

На діаграмі наведено основні класи, які виконують різноманітні функції в процесі пошуку рішення. Класи CIntersector, CCreator, CTicker, CRotator, CShifter виконують допоміжні функції. Класи CDisplayer та CFstGuiRepresentation відповідають за відображення мережі терміналів. Клас CTerminal є представленням терміналу в робочому просторі задачі, а CFstPrototype представленням FST. В ньому присутнє рекурсивне посилання на себе, оскільки дана мережа може складатися з декількох FST меншого розміру. Клас CMSTSolver є головним класом, який оперує множиною терміналів та FST різного розміру для вирішення задачі.

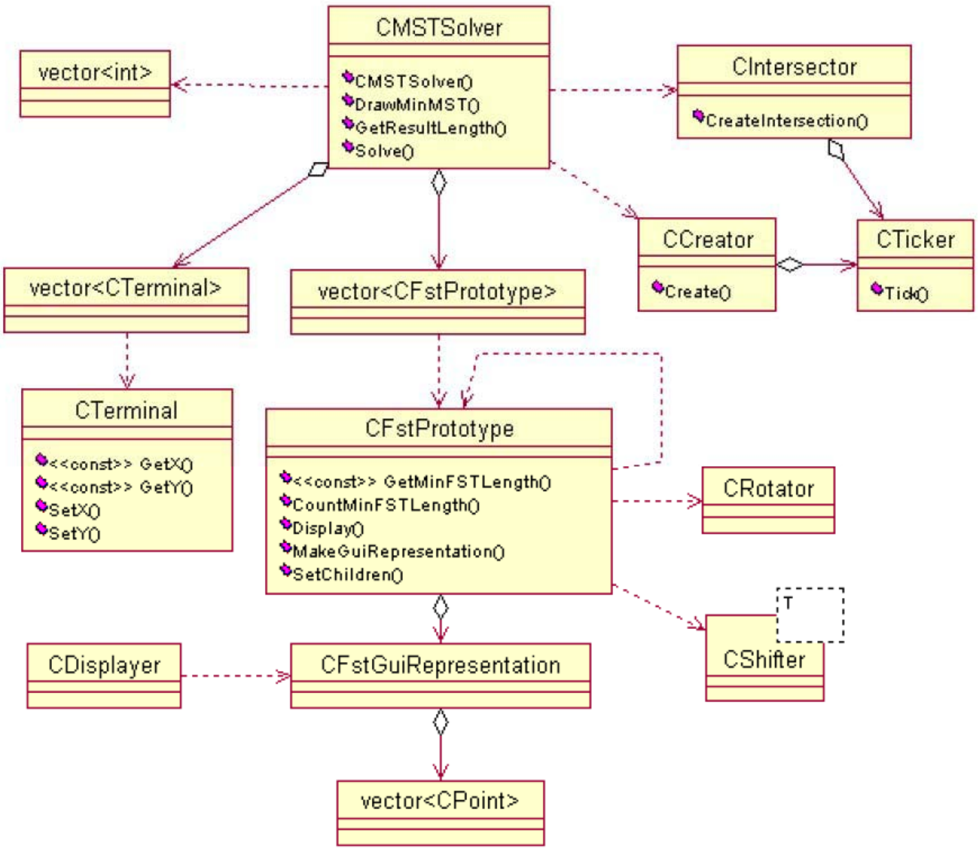

Рис. 4. Діаграма класів для реалізації алгоритму FDP

В роботі [6] доведено, що часова складність алгоритму FDP дорівнює $O(n3^n)$ а ємнісна $O(2^n)$. Отже, було поставлено мету перевірити працездатність алгоритму на декількох тестових прикладах та визначити його ефективність для вхідних множин терміналів різного розміру. Слід зазначити, що для $n \leq 8$ алгоритм працює досить швидко (t < 1сек) і знаходить оптимальне рішення. При подальшому збільшенні кількості терміналів часова складність зростає експоненційно і час виконання досягає 1 доби для кількості терміналів n=13 (рис. 5), що підтверджує теоретичні дослідження.

Для тестових прикладів (множин з 7 та 10 терміналів) було знайдено найкоротшу мережу комунікацій (рис.6).

При цьому довжина мережі складає відповідно 23 та 30 одиниць масштабу. На рисунку червоними точками позначені початкові термінали, зеленими – додаткові термінали (точки Штейнера); сині лінії відображають топологію найкоротшого дерева

Штейнера.

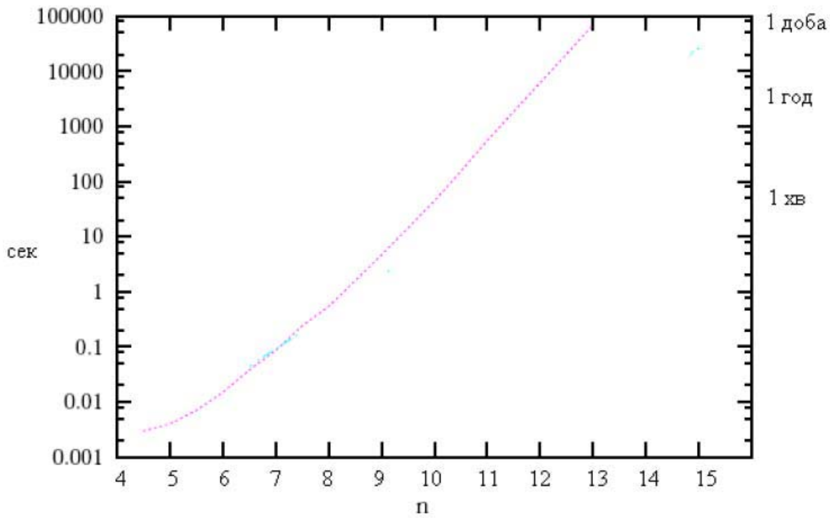

Рис. 5. Графік залежності часу вирішення задачі від її розмірності

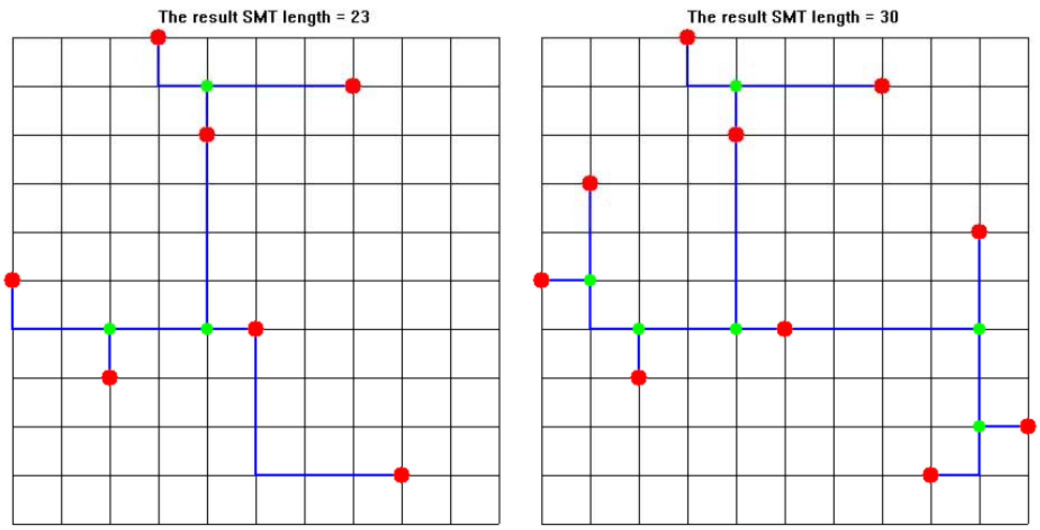

Рис.6. Тестові приклади роботи алгоритму для множин з 7 та 10 терміналів

Таким чином, в процесі роботи було реалізовано алгоритм для знаходження найкоротшої мережі комунікацій, що поєднує множину терміналів. Даний алгоритм ефективний для кількості терміналів n < 13, отже, він цілком може використовуватися в системах автоматизованого проектування для вирішення локальних задач трасування, оскільки конструктор при прокладенні комунікацій в більшості випадків оперує невеликою множиною терміналів для з'єднання.

Перевагами даного алгоритму є його універсальність та оптимальність знайденого рішення. Недоліками є велика часова $O(n3^n)$ та ємнісна $O(2^n)$ складність, а також обмеженість робочого простору двома вимірами.

Тому в подальшому роботу планується сконцентрувати на зменшенні часової складності алгоритму за допомогою використання евристичних методів для зменшення кількості варіантів, які розглядаються в процесі пошуку рішення. Також планується врахувати додаткові обмеження, що впливають на робочий простір та мають вигляд заборонених для трасування зон, а також розробити аналогічний алгоритм для вирішення задач трасування комунікацій в тривимірному просторі.

Література

1. Корячко В.П., Курейчик В.М., Норенков И.П. Теоретические основы САПР. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 400 с.
2. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / Нечепуренко М.И., Попков В.К., Майнагашев С.М. и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 515 с.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
4. M. Hanan. On Steiner's problem with rectilinear distance. SIAM Journal on Applied Mathematics, 14:255-265, 1966.
5. F. K. Hwang. On Steiner minimal trees with rectilinear distance. SIAM Journal on Applied Mathematics, 30:104-114, 1976.
6. J. L. Ganley and J. P. Cohoon. Optimal rectilinear Steiner minimal trees in $O(n^2 2{:}62^n)$ time. In Proceedings of the Sixth Canadian Conference on Computational Geometry, pages 308-313, 1994.