УДК 519.87:517.55

Трунов О.М.

Задача багатокритеріальной апроксимації

Розглядається проблема багато критеріальної апроксимації. Розв'язок задачі багатокритеріальної апроксимації приведено до розв'язку системи агебраїчних рівнянь.

The problem of multy criteria approximation are observed. Solution for multy criteria approximation as solution of system algebraic equations are proposed.

Проблема визначення адекватності фізичного явища і моделі, що його описує, є невід'ємною частиною будь-якого фундаментального дослідження [1, 2]. Встановлення відповідності між явищем і його наближеним описом є задачею багатокритеріального і багатоетапного аналізу [2]. Однак існуючі методи апроксимації та ідентифікації будують розв'язок виходячи із одного типу критерію [3-8]. Так, на сьогоднішній день відомі прямі методи, що шукають розв'язок виходячи із нульового значення відхилення або нульової величини значень інших утворень від відхилення [8-12]. Не менш ефективними є опосередковані методи, що розглядають розв'язок задачі про адекватність як задачу мінімізації, але теж одного типу значень критерію відхилення [11,12]. Слід відзначити, що дослідники завжди шукали такий критерій, який дає найкращі результати з точки зору наближення [9]. В роботі [9] наводяться деякі з них, які доцільно застосовувати для опису статичних об'єктів. Однак там же вводяться поняття різних родів адекватності та демонструється і доводиться твердження, що забезпечити адекватність нульового і першого роду можна тільки задовольняючи декількам критеріям. В роботі [10] надані подальші докази того, що для різних типів моделей забезпечити адекватність динамічних моделей можливо задовольняючи тільки декількам критеріям.

Таким чином, задача апроксимації як задача, розв'язок якої відповідає декількам критеріям, є актуальною задачею фундаментальних досліджень, *головною не розв'язаною проблемою* якої є необхідність відповісти одразу декількам типам критеріїв.

Метою даної статті є поставити та розв'язати задачу багатокритеріальної апроксимації за декількома типами критеріїв.

Постановка задачі

Припустімо, що якісний опис моделі визначено, але для забезпечення кількісного збігу необхідно визначити N констант. Крім того, аналіз адекватності задано вести за двома типами критеріїв: абсолютного збігу значень критерію для окремих станів та наближеного за умов мінімізації відхилень для усіх станів, що знаходяться у межах станів, на які розповсюджується обрана модель.

Введемо $N-$ вимірний вектор шуканих констант X, визначених на множині дійсних чисел $R^{(N)}$, позначимо стани системи $m-$ вимірним вектором Y, що визначено у $m-$ вимірній області дійсних чисел $R^{(m)}$. Позначимо також критерії першого типу $K_i(X,Y_i)=0; i=\overline{1,p}$, а другого $-\min\limits_X E(X,Y)$, тоді задачу апроксимації сформулюємо таким чином:

$$\begin{cases} \min\limits_{X} \; E(X,Y) \\ K_i(X,Y_i)=0; i=\overline{1,p} \end{cases} \qquad (1)$$

Розв'язок задачі багатокритеріальної апроксимації

Припустімо, що усі функції рівнянь системи (1) диференціальні за компонентами вектора X, а компоненти вектора X можна представити через першу компоненту, використовуючи рівняння для критерію першого типу:

$x_i = V_i(x_1, V_2, \ldots V_p, Y_i); i=\overline{2,N}$, тоді, згідно із відомою теоремою математичного аналізу про неявну функцію, можна записати:

$$\frac{dE}{dx_1} = \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial E}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial E}{\partial x_p}\frac{\partial V_p}{\partial x_1}.$$

Аналогічні співвідношення запишемо для похідних від критеріїв першого типу:

$$\frac{dK_i}{dx_1} = \frac{\partial K_i}{\partial x_1} + \frac{\partial K_i}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial K_i}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial K_i}{\partial x_p}\frac{\partial V_p}{\partial x_1}; i=\overline{1,p}.$$

Тепер, записуючи необхідні умови для мінімуму критерію $E(X,Y)$ з урахуванням, що критерії $K_i(X,Y_i)=0; i=\overline{1,p}$ є константами, тому всі похідні від них теж дорівнюють нулю, і разом ці умови утворюють систему, яку запишемо компактно у матричній формі:

$$A \times \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial V_i}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial V_p}{\partial x_1} \end{bmatrix} = 0 , \qquad (2)$$

де позначено

$$A = \begin{bmatrix} \nabla E(X,Y) \\ \nabla K_1(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_i(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_p(X,Y_p) \end{bmatrix}.$$

Оскільки вектор

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial V_i}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial V_p}{\partial x_1} \end{bmatrix} \neq 0$$

не дорівнює нулю, то розв'язком системи (2) є

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \nabla E(X,Y) \\ \nabla K_1(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_i(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_p(X,Y_p) \end{bmatrix} = 0 .$$

Останнє справджується тільки за умов, коли вектори – рядки матриці A є лінійно залежними, тобто існують N скалярів $a_i, i=\overline{1,p}$, не всі з яких дорівнюють нулю, що

$$a_0 \nabla E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} a_i \nabla K_i(X,Y_i) = 0 .$$

Скаляр a_0 не може дорівнювати нулю, бо за умов задачі критерії першого типу визначені в різних станах і тому є лінійно незалежними. Після ділення рівняння на a_0 дістанемо

$$\nabla E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla K_i(X,Y_i) = 0 .$$

Таким чином, для розв'язку задачі системи (1) треба знайти стаціонарну точку функції, штучно утвореної із критеріїв адекватності двох типів:

$$H(X,Y,\Lambda) = E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i(X,Y_i) = 0 ,$$

де $\Lambda = \left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p\right]^T$ вектор множників, що визначають вплив критеріїв на значення вектора X.

Останнє твердження еквівалентне розв'язку системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(X,Y,\Lambda)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1,N} \\ \dfrac{\partial H(X,Y,\Lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1,p} \end{cases} \quad (3)$$

Обговорення результатів

За умов існування похідних від усіх рівнянь, що визначають зміст критеріїв апроксимації в системі (3), маємо $N+p$ рівнянь та стільки ж невідомих. Таким чином, система є повною. Припустімо, що визначено компоненти вектора X^* на множині $R^{(N)}$ як розв'язок будь-яких N рівнянь, тоді якщо ранг матриці, утвореної із правих частин інших p рівнянь, дорівнює p, то існує p чисел компонент вектора $\Lambda = \left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p\right]^T$, не всі з яких дорівнюють нулю і при яких виповнюється

$$\nabla E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla K_i(X,Y_i) = 0 .$$

Однак визначені множники не є метою апроксимації, а знання їх значень не відповідає на питання, чи виконані умови за усіма критеріями апроксимації. Тому більш важливою є необхідність визначити, чи виконана достатня умова мінімуму у точці X^*. Утворивши матрицю із других похідних від критерію, мінімізацію якого треба забезпечити, та визначивши їх значення і тільки за умов їх додатності переконаємось, що всі умови апроксимації виконанні, а X^* є розв'язком вихідної задачі багатокритеріальної апроксимації навіть за умов критеріїв двох типів: абсолютного збіг значень критерію для окремих станів та наближеного за умов мінімізації відхилень для усіх станів, що знаходяться у межах станів, на які розповсюджується обрана модель. Для узагальнення слід додати, що у випадку, коли критеріїв, які вимагають мінімізації декілька, будуючи функцію $H(X,Y,\Lambda)$, слід додати до неї похідні від додаткового критерію за всіма компонентами вектора X, помножені на додаткові важелеві коефіцієнти. При цьому розмірність вектора $\Lambda = \left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots \lambda_{p+N}\right]^T$ збільшиться на N.

Висновки

Розв'язок задачі про багатокритеріальну апроксимацію є розв'язком задачі про стаціонарну точку функції, утвореної із критеріїв апроксимації за допомогою важелевих коефіцієнтів. Важелеві коефіцієнти визначають вплив додаткових критеріїв на константи, що визначаються у ході апроксимації. Задача багатокритеріальної апроксимації приводиться до задачі дослідження операцій мінімізації з обмеженнями.

Література

1. Коган Б.Я., Тетельбаум И.М. Общие вопросы моделирования и моделирование с помощью вычислительных машин // Теория и методы математического моделирования. – М.: Издательство "Наука", 1978. – С. 13.
2. Климов У.Н. Формирование математических моделей как сложный многоуровневый процес, Теория и методы математического моделирования. – М.: Издательство "Наука", 1978. – С. 14-16.
3. Александровский Н.М., Егоров С.В., Кузин Р.Е. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами. – М.: Энергия, 1973. – 272 с.
4. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
5. Козеев А.А. Методы аппроксимации выходных координат нелинейных систем управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 194-199.
6. Эйкхофф П. Современные методы идентификации систем. – М.: "Мир", 1983. – 400 с.
7. Кондратенко Ю.П., Трунов А.Н. Применение методов осредняющих операторов к исследованию нестационарных объєктов // Теория и методы математического моделирования. – М.: Издательство "Наука", 1978. – С. 123-124.
8. Трунов А.Н. Моделирование глубоководных технических средств как системы с распределенными параметрами. Проектирование судов и судовых устройств: Сб. науч. тр. – Николаев: НКИ. – 1989. – С. 127-136.
9. Trounov A.N. Mathematical aspects of image recognition. Proc. Of International tecnology 90, Szezecin, Poland, 1990. – С. 479-493.
10. Трунов О.М. Застосування методу рекурентної апроксимації до задач підвищення точності та безвідвовності систем керування // Науково-методичний журнал. – Т. 35. – Вип. 22. – Миколаїв: МДГУ ім. Петра Могили, 2004. – С. 93-101.
11. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Изд. "Химия", Ленинградское отделение, 1968. – 823 с.
12. Хемминг Р.В. Численые методы. – М.: Изд. "Наука". – 1972. – 400 с.