УДК 62-50

Бідюк П.І., Літинська А., Кравчук Ю.

Оцінювання VaR та CVaR для квадратичного портфеля цінних паперів з факторами ризику, що розподілені за еліптичним законом

Запропоновано метод оцінювання VaR та CVaR для квадратичного портфеля цінних паперів з факторами ризику, що розподілені за еліптичним законом. Це дозволяє враховувати специфіку "важких хвостів", властивих фінансовим рядам. В процесі розв'язку задачі одночасно оцінюються параметри VaR, CVaR і знаходиться оптимальний портфель, що є зручним для учасників торгів. Запропонований метод дозволяє однаково просто використовувати різні гіпотези про закон розподілу без відчутних витрат часового ресурсу.

The method for estimation of VaR and CVaR for quadratic financial portfolio with elliptically distributed risk factors is proposed. The approach allows take into account the specificity of "heavy tails" inherent to financial time series. In the process of the problem solving VaR and CVaR are estimated simultaneously as well as optimal portfolio is constructed what is very convenient for traders. The method proposed is equally useful for a simple use of various hypothesis regarding the distribution law without substantial increase of computing time.

У рамках системи керування фінансовими ризиками досить важливим є проводити оцінку можливих втрат по інструментах і портфелях, засновану на аналізі впливу ринкових ризиків. Найбільш поширеними показниками, що використовуються у якості міри ризику. є Value-at-Risk та Conditional Value-at-Risk. Відомі різні методології їх оцінки, у тому числі Risk Metrics, аналітичні підходи (наприклад, дельта-гама підхід), методи симуляцій Монте-Карло та інші. У зв'язку із цим стає актуальною проблема вибору конкретних стратегій впровадження VaR та CVaR, які б дозволяли адекватно вимірювати ринкові ризики.

При оцінці втрат традиційно приймається гіпотеза про нормальний розподіл фінансових ризиків, однак, дане припущення на практиці рідко виконується, тому що реальні "хвости" розподілів більш важкі, ніж у нормальному випадку [2,3]. Можлива альтернатива розв'язання даної проблеми полягає в прийнятті гіпотези про розподіл фінансових факторів ризику за еліптичними законами. Саме це було зроблено в рамках цієї роботи.

Для підтвердження обґрунтованості даного припущення були досліджені деякі показники фінансових ринків світу (S&P500 (США), NASDAQ (США), Nikkei 225 (Японія), FTSE 100 (Великобританія), DAX (Німеччина), CAC 40 (Франція), HSI (Гонконг), та AORD (Австралія)). Кожен часовий ряд включав щоденні ціни закриття на акції протягом десяти років. Розглядався період з 03.01.1995 по 31.12.2004 (табл. 1).

Розглянемо статистичні властивості прибутковості активу. З усіх видів статистичних характеристик візьмемо ексцес. При нормальному розподілі він дорівнює 3. Однак після аналізу вибірок було отримано, що всі вони мають важкі хвости й характеризуються більшими значеннями ексцесу.

Таблиця 1

Статистичні параметри експериментальних даних

Назва	Потужність вибірки	Математичне сподівання	Медіана	Куртозис	Макс. значення	Мін. значення
S&P500	3529	-0,032	-0,0344	6,5783	7,1139	-5,5732
DAX	3268	-0,0326	-0,0645	6,379	9,8709	-7,5527
CAC400	3473	-0,0191	-0,0231	5,4757	7,6781	-7,0023
NIKKEI225	3447	0,0374	0,0432	5,9614	7,234	-12,4278
TSE300	3519	-0,0204	-0,0441	10,5908	8,4656	-4,6834
FTSE100	3536	-0,0172	-0,0256	5,6566	5,5888	-5,9038

Оскільки даним властиві більш високі значення ексцесу, ніж у нормального розподілу, ми можемо зробити висновок, що має смисл застосування законів із групи еліптичних. Існує декілька методів оцінки VaR та CVaR у випадку прийняття гіпотези про розподіл факторів ризику за еліптичним законом. Для розв'язку такого виду задач звичайно застосовують метод Монте-Карло, що дозволяє моделювати будь-які розподіли ймовірностей і враховувати нелінійні залежності, що забезпечує найвищу точність розрахунку показника VaR. Але головним недоліком цього підходу є його практична незастосовність через неможливість одержати оптимальне рішення в реальному масштабі часу.

Також на сьогодні існує декілька нових робіт з цього питання, наприклад, Kamdem J.S. [1] ставить за мету отримання аналітичного розв'язку задачі оцінки VaR та CVaR. Kamdem [1] запропонував обчислювати VaR за допомогою спрощення інтегрального рівняння, але цей метод досить важко програмно реалізувати, до того ж він буде давати великі похибки внаслідок використання апроксимованих функцій, які будуть накладатися на похибки розрядної сітки обчислювальної машини. Цей метод використовується здебільшого для теоретичних досліджень, і його не адаптовано для практичного застосування. Саме з цих причин метод, запропонований у даній роботі, виявився вигідною і більш коректною альтернативою двом попереднім.

Постановка задачі

Для формалізації постановки задачі необхідно ввести деякі поняття та обґрунтувати їх використання. Позначимо через x вектор, що описує портфель фінансових інструментів, де x_i характеризує позицію по інструменту i. Ми припускаємо, що випадковий вектор y визначається імовірнісною мірою P на Y (Борелівська міра), що не залежить від x, та визначає прибутковість кожного інструмента портфеля. Для кожного x позначимо через $\psi(x,\cdot)$ на R результуючу функцію розподілу втрат $z = f(x,y)$, тобто

$$\psi(x,\xi) = P\{y \mid f(x,y) \le \xi\}. \quad (1)$$

Тепер VaR визначається наступним чином:

Означення VaR. $\alpha - VaR$ – втрати, які відповідають розв'язку x, – це величина, що дорівнює

$$\xi_\alpha(x) = \min\{\xi \mid \psi(x,\xi) \geq \alpha\}. \tag{2}$$

Коли $\psi(x,\cdot)$ неперервна й строго зростаюча, $\xi_\alpha(x)$ єдина ξ, що задовольняє $\psi(x,\xi) = \alpha$. В іншому випадку рівняння може не мати розв'язків або мати їх безліч. Ці ситуації спричиняють розрив у динаміці VaR: стрибок напевно відбудеться, якщо буде потрібно не надто високий рівень значущості. Цей ступінь нестійкості несприятливий для міри ризику, на якій могли бути зосереджені величезні грошові суми. Це ускладнює процес керування задачами, орієнтованими на VaR. Серйозним недоліком VaR до того ж є те, що він не дає можливості розглядати ситуації, коли втрати виходять за границі VaR. Альтернативною мірою, що визначає обсяг втрат, які належать до хвоста розподілу, є CVaR .

Означення CVaR. $\alpha - CVaR$ – втрати, що відповідають розв'язку x – це величина, що дорівнює $\phi_\alpha(x) =$ математичне сподівання α- хвоста розподілу $z = f(x,y)$, де описаний розподіл визначений у такий спосіб

$$\psi_\alpha(x,\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_\alpha < \xi_\alpha(x), \\ [\psi(x,\xi) - \alpha]/[1-\alpha], & \text{если } \xi_\alpha \geq \xi_\alpha(x). \end{cases} \tag{3}$$

Важливо звернути увагу на те, що означення узагальнюється на випадок існування стрибків функції розподілу втрат шляхом зміни масштабу функції $\psi(x,\xi)$ в інтервалі $[\alpha,1]$. Найбільш важливим для застосування є те, що CVaR може бути виражений зручною для обчислення мінімізаційною формулою.

Цей підхід був запропонований Урясевим та Рокафеларом [9]. Метою цієї роботи було узагальнення даного методу оцінки показників ризику VaR та CVaR на випадок прийняття гіпотези щодо еліптичного розподілу ризикових факторів та використання квадратичного портфеля.

Метод розв'язку задачі

Як було зазначено вище, в основу цього дослідження покладено метод, запропонований в роботі Урясева та Рокафелара [9, 10, 11]. Тепер продемонструємо, що α-VaR і α-CVaR втрати z, пов'язаної з вибором x, можуть бути обчислені одночасно в процесі розв'язку елементарної одновимірної задачі оптимізації опуклого типу. З цією метою скористаємось спеціальною функцією

$$F_\alpha(x,\xi) = \xi + \frac{1}{1-\alpha} E\left\{[f(x,y) - \xi]^+\right\}, \text{ де } [t]^+ = \max\{0, t\}. \tag{4}$$

Теорема (фундаментальна формула мінімізації). $F_\alpha(x,\xi)$ як функція аргументу $\xi \in R$ обмежена й опукла (отже неперервна), з

$$\phi_\alpha(x) = \min_\xi F_\alpha(x,\xi), \tag{5}$$

і більше того

$$\xi_\alpha(x) = \textit{нижня границя} \arg\min_\xi F_\alpha(x,\xi),$$

$$\xi_\alpha^+(x) = \textit{верхня границя} \arg\min_\xi F_\alpha(x,\xi), \tag{6}$$

де argmin відноситься до множини ξ, на якій досягається мінімум. У цьому випадку вона повинна бути непорожньою, закритою та обмеженою інтервалом (можливо зменшуваним до однієї точки). Зокрема, ми завжди маємо

$$\xi_\alpha(x) \in \arg\min_\xi F_\alpha(x,\xi), \ \phi_\alpha(x) = F_\alpha(x,\xi_\alpha(x)). \tag{7}$$

Теорема акцентує увагу на розходженні між CVaR й VaR, відображаючи фундаментальну причину того, чому CVaR поводиться краще, ніж VaR, коли залежність від вибору x повинна бути врахована. Причина полягає в тому, що оптимальне значення в задачі мінімізації, у цьому випадку $\phi_\alpha(x)$, набагато зручніше для оперування у вигляді функції параметрів, ніж оптимального набору розв'язків, що тут argmin є інтервалом, для якого $\xi_\alpha(x)$ – нижня гранична точка [10].

Наслідок 1 (опуклість CVaR). Якщо $f(x,y)$ опукла по x, то й $\phi_\alpha(x)$ опукла по x. Насправді, у цьому випадку $F_\alpha(x,\xi)$ є одночасно опуклою по (x,ξ). Подібним чином, якщо $f(x,y)$ сублінійна по x, то й $\phi_\alpha(x)$ сублінійна по x. Тоді й $F_\alpha(x,\xi)$ одночасно сублінійна по (x,ξ).

Наслідок 2 (стійкість CVaR). Функція $\phi_\alpha(x)$ є неперервною по відношенню до вибору $\alpha \in (0,1)$ і навіть має ліві й праві похідні:

$$\frac{\partial^-}{\partial\alpha}\phi_\alpha(x) = \frac{1}{(1-\alpha)^2}E\left\{\left[f(x,y)-\xi_\alpha(x)\right]^+\right\}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^+}{\partial\alpha}\phi_\alpha(x) = \frac{1}{(1-\alpha)^2}E\left\{\left[f(x,y)-\xi_\alpha^+(x)\right]^+\right\}. \tag{8a}$$

Одним з найбільш важливих наслідків цієї теореми є наступне твердження.

Наслідок 3 (VaR та обчислення CVaR як побічного продукту). *Якщо* (x^*,ξ^*) *мінімізує* $F_\alpha(x,\xi)$ *на* X×R , *то x* не тільки мінімізує* $\phi_\alpha(x)$ *на X, але також*

$$\phi_\alpha(x^*) = F_\alpha(x^*,\xi^*), \quad \xi_\alpha(x^*) \le \xi^* \le \xi_\alpha^+(x^*), \tag{9}$$

де, фактично, $\xi^* = \xi_\alpha(x^*)$ якщо $\arg\min_{\xi\in R} F_\alpha(x^*,\xi)$ звужується до однієї точки[10]. Саме ці властивості VaR та CVaR були використані в наших дослідженнях. В загальному випадку існують декілька методів апроксимації функції (7), але ми використовуємо метод генерації сценаріїв $y_1,\ldots y_q$ із заданою щільністю розподілу.

Тепер оптимізаційна задача приймає загальний вигляд:

$$\min_{(x,\xi)\in X\times R} F_\alpha(x,\xi) = \min_{(x,\xi)\in X\times R}\left[\xi + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{i=1}^{q}\left[f(x,y_i)-\xi\right]^+\right], \tag{10}$$

або більш зручне формулювання

$$\min_{(x,\xi)\in X\times R} F_\alpha(x,\xi) = \min_{(x,\xi)\in X\times R}\left[\xi + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{i=1}^{q} z_i\right], \tag{11}$$

$$z_i \ge \left[f(x,y_i)-\xi\right],$$

$$z_i \ge 0, \quad i=\overline{1..q}.$$

Тепер розглянемо випадок знаходження розв'язку задачі (11) з використанням квадратичного портфеля, за умови, що фактори ризику розподілені за еліптичним законом. Портфель з n цінних паперів є вектором $X \in R^n$; компонента x_i – це кількість вкладів i-го інструменту, яка на практиці не обов'язково є цілою. Таким чином, у момент часу t ціна портфеля n цінних паперів задається:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i(t) \tag{12}$$

де $Y(t) = (y_1(t),...,y_n(t))$ так, що

$$P(t) - P(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i(t) - y_i(0)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)(\frac{y_i(t)}{y_i(0)} - 1). \quad (13)$$

Для малих збурень часу і ринку припускаємо, що логарифмічна доходність задається:

$$\log(\frac{y_i(t)}{y_i(0)}) = \eta_i(t), \quad (14)$$

звідси

$$y_i(t) - y_i(0) = y_i(0)(\frac{y_i(t)}{y_i(0)} - 1) = y_i(0)(\exp(\eta_i(t)) - 1).$$

Тепер отримуємо, що

$$Y(t) = (y_1(0)\exp(\eta_1),...,y_n(0)\exp(\eta_n)).$$

Використовуючи розклад експоненти в ряд Тейлора, завдяки малим збуренням доходностей від часу, отримаємо:

$$\exp(\eta_i(t)) - 1 \approx \eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2}. \quad (15)$$

Якщо припустити, що $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ має еліптичний розподіл $N_n(\mu,\Sigma,\phi)$, то

$$P(t) - P(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)(\exp(\eta_i(t)) - 1) \approx \sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2}). \quad (16)$$

Дотримуючись загальноприйнятої традиції записувати втрати портфеля від'ємними числами і стверджуючи, що Value-at-Risk є додатним обсягом грошей, VaR_α довірчого рівня $(1 - \alpha)$ задаємо розв'язком наступного рівняння:

$$\Pr ob\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2}) \le -VaR_\alpha\right\} = \alpha.$$

Далі елементарні математичні перетворення показують, що

$$\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2} = \frac{1}{2}\left((\eta_i(t)+1)^2 - 1\right), \quad (17)$$

а звідси

$$\Pr ob\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2} y_i(0)(\eta_i(t)+1)^2 \le -VaR_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2} y_i(0)\right\} = \alpha. \quad (18)$$

Позначимо $Z = (\eta_1 + 1,...,\eta_n + 1)$; очевидно, що Z є еліптичним розподілом завдяки тому, що це лінійна комбінація еліптичних розподілів η. Відзначимо, що $Z \sim N(\mu + 1, \Sigma, \phi')$ має неперервну функцію щільності $h_1(x)$. Використаємо ці перетворення у формулі (4) і отримаємо:

$$F_\alpha(x,\xi) = \xi + \frac{1}{1-\alpha} E\left\{\left[f(x,y) - \xi\right]^+\right\} = \xi + \frac{1}{1-\alpha} \int_{y \in R^m} \left[f(x,y) - \zeta\right]^+ p(y)dy, \quad (19)$$

де

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)(\exp(\eta_i(t)) - 1) \approx \sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)((\eta_i(t)+1)^2 - 1) \text{ або}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i(0)(z_i^{\,2} - 1).$$

Отже, маємо:

$$f(x,z)=\xi+\frac{1}{1-\alpha}\int_{z\in R^n}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i(0)(z_i^{\,2}-1)-\zeta\right]^{+}h(z)dz, \qquad (20)$$

де $h(z)=\frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}g(z-\mu-1)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}g(z-\mu-1)$ – щільність розподілу Z; $g(z)$ – характеристичний генератор еліптичного закону.

Як сказано вище, ми апроксимуємо функцію (20) генеруванням сценаріїв із заданою щільністю розподілу [4]. Тепер можна записати остаточне формулювання оптимізаційної задачі:

$$\min_{x,u,\xi}(\xi+\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{m}u_j)$$

$$u_j\geq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i(0)(z_{ij}^{\,2}-1),$$

$$u_j\geq 0,\ j=\overline{1..m}$$

В результаті ми отримали задачу лінійного програмування, яка досить легко розв'язується за допомогою симплекс-методу.

Результати обчислювальних експериментів

Для дослідження обрано наступні представники класу еліптичних розподілів:

1) нормальний закон – $g_n(u)=\exp(-u/2)$; $\psi(u)=\exp(-u/2)$;
2) α-стійкий закон – $\psi(u)=\exp(-r(u)^{s/2})$, $0<s\leq 2$, $r>0, \alpha\in(1;2)$;
3) закон Стьюдента зі ступенем свободи $t\in(3;5)$;

$$g_n(u)=(1+\frac{u}{m})^{-(n+m)/2},\ m>0,\ m\in Z\ ;$$

4) логістичний закон – $g_n(u)=\frac{\exp(-u)}{[1+\exp(-u)]^2}$,

де $g_n(u)$ – генератор щільності, $\psi(u)$ – характеристичний генератор.

Цей вибір пояснюється тим, що закон Стьюдента та α-стійкий закон мають дуже зручні властивості, а саме ступінь свободи та параметр α безпосередньо впливають на значення куртозису розподілу [5].

Нехай $X=(X_1,...,X_n)^T$ – випадковий вектор спостережень, розподілений за багатовимірним еліптичним законом. Будемо вважати, що випадковій змінній X_i відповідає математичне очікування μ_i й дисперсія σ_i^2. Позначимо коваріаційну матрицю X через Σ. Для всіх векторів, розподілених за еліптичним законом, щільність розподілу виражається в такий спосіб:

$$f(X)=\frac{c_n}{\sqrt{|\Sigma|}}g_n\left[(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\right],$$ де c_n – нормуючий множник.

Для виконання експерименту обрано два набори фінансових даних:

валютний портфель (євро/австралійський фунт, євро/англійський фунт, євро/ долар США, євро/російський рубель, євро/японська єна) та портфель акцій фондового ринку Росії (акції компаній: «Газпром», «РАО ЕЭС», «Сургутнефтегаз», «Северсталь»). Обидва варіанти включали ціни закриття торгів на біржі протягом місяця.

Першим експериментом було *дослідження залежності значень VaR та CVaR від обраного розподілу та рівня значущості*. В цьому випадку розглядався валютний

портфель. Результати експерименту представлені в Табл.2 та Табл. 3.

Таблиця 2

Випадок, коли рівень значущості дорівнює 0,95

Вид розподілу	VaR	CVaR
Нормальний розподіл	0,3756	0,4644
1,5-стійкий закон	0,6068	0,6979
Стьюдент 4	0,7032	0,7829
Логістичний закон	0,5324	0,6748

Таблиця 3

Випадок, коли рівень значущості дорівнює 0,97

Вид розподілу	VaR	CVaR
Нормальний розподіл	0,4541	0,4883
1,5-стійкий закон	0,6446	0,7351
Стьюдент 4	0,7626	0,9814
Логістичний закон	0,5571	0,6825

Аналізуючи отримані дані, ми зробили висновок, що з ростом рівня значущості спостерігається зростання значень VaR та CvaR (рис. 1, 2). Також значення VaR та CVaR збільшуються із зростанням значеннь куртозису законів розподілу. Це свідчить, що метод та його програмна реалізація відповідають теорії і природній логіці.

Наступним кроком ми провели *дослідження ступеня неврахованого ризику при відмові гіпотези про нормальний розподіл фінансових рядів.* Дані, представлені нижче, показують, яка доля ризику може бути не врахована, якщо гіпотеза про нормальний розподіл ризикових факторів не виконується. Дослідження проводились в залежності від рівня значущості при різних альтернативних законах розподілу факторів ризику. Для дослідження також був обраний валютний портфель. Результати експерименту представлені в табл. 4 та табл. 5.

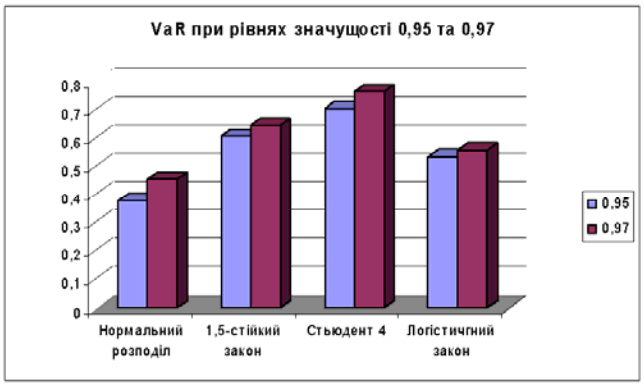

Рис. 1. Характер зміни значень VaR та CvaR

Звідси ми бачимо, що значення VaR та CVaR збільшуються із значенням куртозису законів розподілу. Саме тому, чим більшим є відхилення розподілу від нормального, тим більший процент неврахованого ризику.

Також спостерігається більший процент неврахованого ризику при використанні CVaR в якості міри ризику ніж у VaR (рис.3, 4). Це є дуже важливим зауваженням,

тому що останнім часом популярність CVaR набирає великі оберти, що обумовлюється його зручністю у використанні. Саме тому детальний аналіз розподілу фінансового ряду має більше значення для CvaR, ніж для VaR.

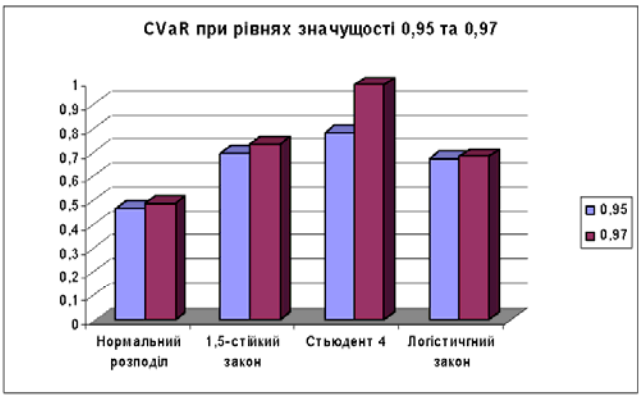

Рис. 2. Характер зміни значень VaR та CvaR

Таблиця 4

Величина неврахованого ризику за умови прийняття гіпотези про нормальний розподіл, коли вона не справджується(VaR)

VaR

Рівень значущості	**0,95**	**0,97**
1,5-стійкий закон	38,102	29,5532
Стьюдент 4	46,587	40,4537
Логістичний закон	29,452	18,4886

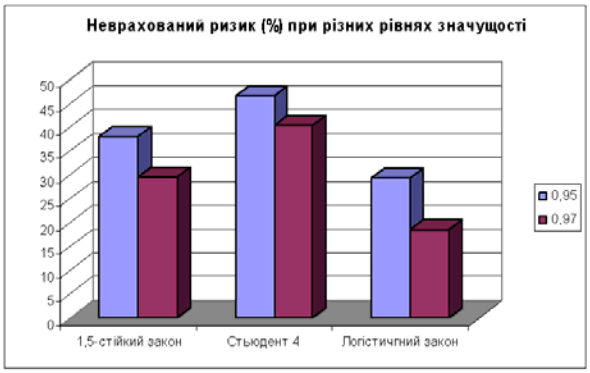

Рис. 3. Характер зміни значень VaR та CvaR.

Таблиця 5

Величина неврахованого ризику за умови прийняття гіпотези про нормальний розподіл, коли вона не справджується(CVaR)

CvaR

Рівень значущості	**0,95**	**0,97**
1,5-стійкий закон	33,458	33,5737
Стьюдент 4	40,682	50,2445
Логістичний закон	31,18	28,4542

Далі ми дослідили *зміну значень VaR та CVaR для стійкого закону розподілу*

випадкових величин. В цьому експерименті досліджувалась залежність значень VaR та CVaR від параметра альфа-стійкого закону, який визначає вигляд «хвоста» розподілу, що було описано вище. Для дослідження був обраний валютний портфель. Результати експерименту представлені в табл.6 та табл. 7.

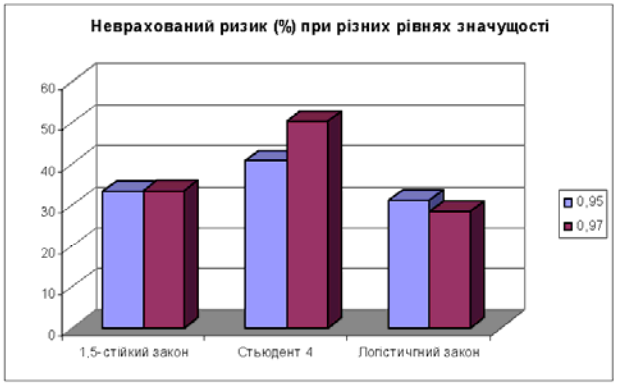

Рис. 4. Характер зміни значень VaR та CvaR.

Таблиця 6

Випадок, коли рівень значущості дорівнює 0,95.

Рівень стійкості	VaR	CVaR
1,1	1,199	1,4534
1,3	0,639	0,7625
1,5	0,4993	0,6258
1,7	0,4226	0,557
1,9	0,3623	0,4538

Таблиця 7

Випадок, коли рівень значущості дорівнює 0,97

Рівень стійкості	VaR	CVaR
1,1	1,43	1,5694
1,3	0,7527	1,0079
1,5	0,6297	0,7078
1,7	0,5306	0,6203
1,9	0,4313	0,5076

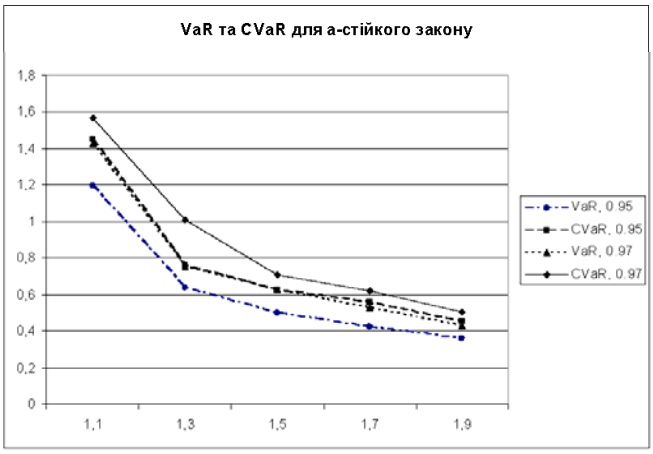

Рис.5. Характер зміни значень VaR та CvaR для а-стійкого закону.

Аналізуючи отримані результати, ми бачимо, що значення VaR та CVaR зменшуються із збільшенням значення параметра стійкості, тому що куртозис розподілу зменшується із збільшенням α закону розподілу (рис.5). Ще спостерігається стабілізація значень показників VaR та CVaR з наближенням α до 2, що відповідає нормальному розподілу та характеризується найменшим значенням куртозису-3.

Останній випадок, що був досліджений, – це *залежність значень VaR та CVaR від горизонту прогнозу*. Мета цього експерименту – дослідити, як змінюється значення VaR та CVaR в залежності від горизонту прогнозу. Для дослідження був обраний портфель акцій фондового ринку та в якості закону розподілу комбінація 1,5-стійкого закону та закону Стьюдента зі ступенем свободи 4. Результати спостережень представлені в табл. 8 та табл. 9.

Таблиця 8

Випадок, коли рівень значущості дорівнює 0,95

Горизонт прогнозу	VaR	CVaR
1	3,8383	4,9933
3	6,7764	8,7551
5	7,1827	9,4434
7	8,7453	11,0025
10	8,7806	10,8819

Як бачимо з наведених результатів експериментів, всі вони відповідають теорії. Зі збільшенням рівня значущості та горизонту прогнозу показники VaR та CVaR збільшуються, причому скорочується їх різниця (рис. 6). Треба зауважити, що методи, які базуються на прогнозному значенні волатильності, такі як коваріаційний метод, не завжди відповідають теорії, тому що у випадку формування низхідного тренду відбувається значна недооцінка ризику при збільшенні горизонту прогнозу.

Таблиця 9

Випадок, коли рівень значущості дорівнює 0,97

Горизонт прогнозу	VaR	CVaR
1	5,5792	6,2935
3	6,5295	8,8384
5	9,686	11,9416
7	11,7371	12,6296
10	11,1448	12,6331

Висновки по роботі

Виходячи з результатів дослідження, необхідно виділити наступні достоїнства застосування такого виду оптимізаційної задачі для оцінки ступеня ризику:

1) припущення про еліптичний розподіл факторів ризику є більш адекватним і таким, що відповідає дійсності, це дозволяє враховувати специфіку "важких хвостів", властивих фінансовим рядам;
2) у процесі розв'язку задачі одночасно оцінюються параметри VaR, CVaR і знаходиться оптимальний портфель, що є зручним для учасників торгів;
3) метод генерації сценаріїв за заданим розподілом дозволяє, як і в методі Монте-Карло, враховувати нелінійні цінові характеристики;
4) квадратичний портфель є більш універсальним, ніж лінійний в аспекті врахування

нелінійних взаємозв'язків факторів ризику і дуже простий у використанні;

5) раніше задача оцінки VaR й CVaR, заснована на припущенні про еліптичний розподіл факторів ризику, мала високу обчислювальну складність, що робило її практичну застосовність неможливою. Але описаний у даній роботі метод дозволяє однаково просто використати різні гіпотези про закон розподілу без відчутних витрат часового ресурсу.

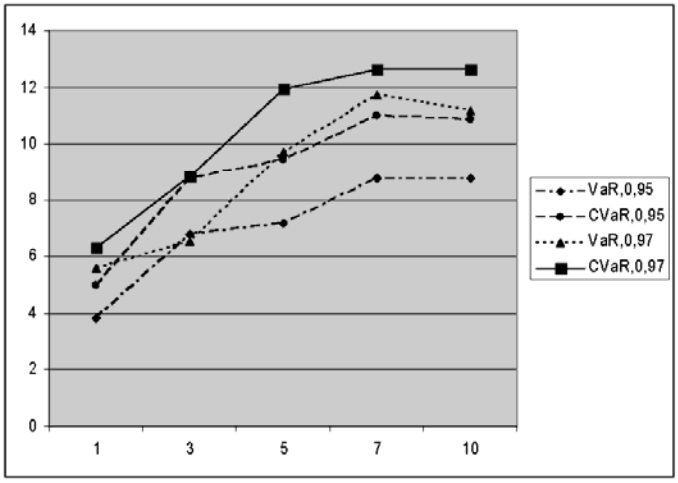

Рис. 6. Характер зміни значень VaR та CvaR

Отже, на думку авторів, запропонована методологія має велику перспективу розвитку та вимагає більш детального вивчення його застосування у галузі менеджменту ризиків.

Література

1. Kamdem J.S. Value-at-Risk and Expected Shortfall for Quadratic Portfolio of Securities with Mixture of Elliptic Distributed Risk Factors / Laboratoire de Math´ematiques, CNRS UMR 6056, Universit´e De Reims, 2003. – 16 p. http://arxiv.org/abs/cs.CE/0310043.
2. Cambanis, S., Huang, S., and Simons, G. On the Theory of Elliptically Contoured Distributions // Journal of Multivariate Analysis, 1981, v. 11, pp.68-385.
3. Schmidt R. Tail dependence for elliptically contoured distributions // Math. Methods Oper. Research, 2002, v. 55, pp. 301-327.
4. Geweke J. Efficient Simulation from the Multivariate Normal and Student-t Distributions Subject to Linear Constraints and the Evaluation of Constraint Probabilities / Department of Economics University of Minnesota Minneapolis, 1991. – 35 p.
5. Borak S., Härdle W., Weron R. Stable Distributions / SFB 649, Humboldt-Universität zu Berlin Spandauer Straße 1, D-10178 Berlin. – 28 p.
6. Harmantzis F.C., Linyan Miao. On the Impact of Heavy-Tailed Returns to Popular Risk Measures: Evidence from Global Indices / 2005- 36 p., http://www.gloriamundi.org.
7. Harmantzis F.C., Linyan Miao, Yifan Chien. Empirical Study of Value-at-Risk and Expected Shortfall Models with Heavy Tails / 2005,- 19 p. http://www.gloriamundi.org.
8. Abken P.A. An Empirical Evaluation of Value at Risk by Scenario Simulation / Financial Economist Risk Analysis Division Comptroller of the Currency, 2000, - 24 p. http://www.gloriamundi.org.
9. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk // Journal of Risk, v. 2, pp. 21– 41, www.ise.ufl.edu/uryasev/cvar.pdf .
10. Rockafellar R.T., Uryasev, S., 2002 // Conditional value-at-risk for general loss distributions // Journal of Risk, v. 2, pp. 21–41, www.ise.ufl.edu/uryasev/cvar2.pdf.