

## *Математичне моделювання процесів твердіння та охолодження порожнинного циліндричного виливка при відцентровому литті в масивний кокіль*

Здійснено математичне моделювання теплових процесів, пов'язаних зі зняттям перегріву розплаву, твердінням та наступним охолодженням порожнинного циліндричного виливка, що виготовляється методом відцентрового лиття в масивний металевий кокіль. При цьому деякі з істотних математичних труднощів, зумовлених наявністю рухомих фронтів кристалізації, подолано шляхом залучення фундаментальної концепції калориметричної температури [1-3], неодноразово підтвердженої як теоретично, так і експериментально. На основі розв'язку низки крайових задач теорії теплопровідності, до яких у роботі зведено математичне моделювання згаданих процесів, проведено вибір значень термодинамічних параметрів з метою вдосконалення технологічного процесу при серійному виготовленні розглядуваних виливків на установці ротативного типу. Належний вибір вказаних параметрів забезпечує як наперед задане положення точки зустрічі фронтів кристалізації всередині виливка, так і сталість температури кокілю на початку та в кінці часового циклу виготовлення кожного окремого виливка.

The mathematical simulation is made for thermal phenomena associated with decreased overheat, solidification and sequent cooling of the hollow cylindrical casting being cast into metal mould by centrifugal casting. Some essential mathematical difficulties caused by the existence of moving solidification fronts are overcome in this study with adopting the fundamental concept on calorimetric temperature [1-3], the concept is known to have been repeatedly validated in both theoretical and experimental way. Based on the solution to the series of the heat conductivity theory's boundary-value problems the mentioned processes' mathematical simulation is reduced to the choice of some thermodynamic parameters is made to improve manufacturing methods for the castings in question to be batch-produced on the roundabout-type plant. The appropriate parameters' choice makes it possible to ensure both the necessary crystallization fronts meeting position inside the casting and equality of the mould temperatures at the every separate casting production cycle's beginning and its termination.

### *1. Загальна постановка задачі та її спрощення*

В ливарному виробництві при заданій геометрії (форма й розміри) та фіксованому хімічному складі металевого виливка єдиним способом впливу на його зернисту структуру і майбутні механічні властивості залишається керування тепловими процесами кристалізації та охолодження виливка. Разом з тим через значні трудомісткість та вартість, відносно швидкоплинність і високі температурні характеристики чисто експериментальне дослідження вказаних явищ та процесів на сьогоднішній день є дещо проблематичним; враховуючи сучасний стан математичного аналізу та обчислювальної техніки, слід визнати, що теоретичний шлях

дослідження є більш реальним, а отже, і більш доцільним. Метою даної роботи є створення математичної моделі процесів кристалізації та охолодження порожнинного циліндричного виливка при виготовленні його методом відцентрового лиття в масивний металевий кокіль. Досягнення вказаної мети здійснюється при залученні фундаментальних здобутків вітчизняної науки про формування виливка [1-3], таких як, наприклад, неодноразово підтверджена теоретично й експериментально концепція калориметричної температури та надзвичайно ефективний метод еквівалентного виливка (який застосовується у випадку, коли матеріалом виливка є не чистий метал, а сплав металів). Запропонована у роботі

математична модель дає можливість як вдосконалення технології виготовлення самих виливків розглядуваного типу, так і при розробці технологічного обладнання, яке використовується з метою автоматизації виробничих процесів у ливарному виробництві.

Зазначимо, що деякі фрагменти цього дослідження знайшли відображення в статті [4].

На предметному рівні задача моделювання кристалізації та охолодження порожнинного циліндричного виливка формулюється наступним чином.

Описати нестационарні температурні поля  $T_1$ –виливка й  $T_2$ –кокілю на часовому проміжку, що включає такі стадії [3] формування виливка, як зняття перегріву розплаву, його кристалізацію при сталій температурі (чистий метал) або в інтервалі температур (сплав) і охолодження затверділого виливка до заданої температури в кокілі, якщо відомі: висота  $H$  виливка, радіус  $R$  його зовнішньої поверхні, товщина  $l_1$ –виливка й  $l_2$ –стілки кокілю; масові густини  $\rho_1$ –виливка й  $\rho_2$ –кокілю; теплоємності матеріалу  $c_1$ –виливка й  $c_2$ –кокілю; теплопровідності  $\lambda_1$ –виливка й  $\lambda_2$ –кокілю; теплопровідність  $\lambda_i$  товщина  $\varepsilon$  ізоляційної фарби, що запобігає безпосередній контакт виливка й кокілю; температура середовища  $T_{01}$  усередині виливка й  $T_{02}$ –зовні кокілю ( $T_{01} \neq T_{02}$ ); температура розплаву  $T_{10}$  у момент його миттєвого заповнення кокілю й температура  $T_{20}$  самого кокілю; коефіцієнти тепловіддачі  $\alpha_{01}$ –на внутрішній поверхні виливка й  $\alpha_{02}$ –на зовнішній поверхні кокілю; температура  $T_{cr}$  кристалізації чистого металу або температура  $T_L$ –ліквідуса й  $T_S$ –солідуса для сплаву; питома теплота  $L$  кристалізації розплаву. При цьому вилівок і кокіль розглядаються як складові елементи єдиної взаємодіючої із зовнішнім середовищем нестационарної теплофізичної системи, причому сам вилівок у процесі кристалізації підрозділяється на кілька областей з різним агрегатним станом: рідке ядро й фронти

кристалізації (у випадку чистого металу) або двофазні перехідні зони (у випадку сплаву), що рухаються назустріч один одному з боку кокілю й внутрішньої поверхні виливка і що містять як рідку, так і тверду складові, межами яких слугують поверхні ліквідуса й солідуса. Відзначені фронти кристалізації або перехідні зони відокремлюють рідке ядро від затверділих ділянок виливка.

Спрощення сформульованої задачі досягається шляхом:

- прийняття неодноразово перевіреної теоретично й експериментально [1-3] концепції про калориметричну температуру [1; 3], що надає можливість роз'єднати вихідну теплофізичну систему на окремі складові (вилівок і кокіль), температурні поля яких описуються незалежно;
- використання у випадку сплаву металів методу еквівалентного виливка [3], що дозволяє кожну зі згаданих перехідних зон стягти в одну лінію – фронт кристалізації;
- прийняття припущення, що між геометричними параметрами виливка й кокілю існують такі співвідношення:  $l_1 \ll R \ll H$ ,  $l_1 \leq l_2$ , перше з яких означає, що температурне поле системи вилівок – кокіль в осесиметричному випадку еквівалентне температурному полю нескінченної плити, а друге – що кокіль можна вважати масивним у порівнянні з вилівком;
- завдання [1] залежності температурних полів виливка і кокілю від просторової змінної параболою  $n$ -го степеня ( $n = 1$  для виливка й  $n = 2$  для кокілю) і, отже, вилучення вказаної змінної з числа аргументів шуканих функцій.

## 2. Математичне формулювання задачі

З міркувань зручності проведення обчислень, а також для надання одержуваним результатам більшої загальності представляється доцільним перейти до безрозмірних величин  $\theta$ , і т з

формулами

$$\tau = a_j t, j = 1, 2,$$

де  $T$  – температура (із відповідними індексами; у випадку сплаву металів величину  $T_{cr}$  слід замінити на  $T_L$ );

$x$  – просторова координата, відлічувана уздовж радіуса від внутрішньої поверхні вилівка або кокілю (у залежності від того, про яке температурне поле йдеться); температуропровідність матеріалу (вилівка або кокілю) відзначається відповідно індексом  $j = 1$  чи  $2$ ;

$$t - \text{розмірний час } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \dot{\theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta'.$$

Умовимося надалі для простоти письма та запобігання введення нових позначень горизонтальну риску над опускає. Крім того, частинні похідні функції  $\theta(x, \tau)$  по змінних  $x$  і  $\tau$  позначатимемо відповідно штрихом та крапкою над символом:

Часовий інтервал кристалізації розплаву й охолодження затверділого вилівка в кокілі  $0 < \tau < \tau_f$  зручно підрозділити в такий спосіб:  $0 < \tau_1 < \tau_s < \tau_f$ , де  $\tau = 0$  – миттєве заливання розплаву в кокіль,  $\tau = \tau_1$  – момент закінчення зняття перегріву,  $\tau = \tau_s$  – момент затвердіння вилівка,  $\tau = \tau_f$  – момент видалення охолодженого до заданої температури вилівка з кокілю.

Математичне формулювання вихідної задачі зводиться до послідовності наступних задач.

### 2.1. Задача Коші про зняття

$$\dot{\theta}_1 + (перегрів) \theta_1 = B_{21} \theta_c,$$

Припускаючи [10, 3] що в процесі зняття перегріву невідома функція  $\theta_1$  не залежить від координати  $x$ , а тільки від  $\tau$ , тобто  $\theta_1 = \theta_1(\tau)$ , визначити цю функцію як розв'язок такої задачі  $\theta_1(0) = \theta_{10}$ ,

де  $\theta_c$  – безрозмірна калориметрична температура, визначена вище,  $B_{01}$  та  $B_{21}$  – числа Біо, які характеризують відповідно, теплообмін між поверхнею вилівка й середовищем  $\theta_{cr} - \theta_c$  в середині  $\beta$ -вилівка та ізоляційною фарбою, яка заповнює зазор між вилівком і кокілем, причому вказані числа Біо визначаються за формулами [2]

$$\dot{\theta}_1 = \theta_1'', \quad 0 < x < \xi_0, \quad 1 - \xi_1 < x < 1;$$

### 2.2. Крайова задача

$\tau_1$  про кристалізацію розплаву

Визначити температурне поле вилівка в процесі його твердіння як розв'язок рівняння теплопровідності

$$\dot{\theta}_1' + B_{21} \theta_1 = B_{21} \theta_c$$

$$\dot{\theta}_1' - L_0 \dot{\xi}_0 = 0$$

який задовольняє граничні умови

$$\text{при } x = 0,$$

$$\text{при } x = 1,$$

$$\text{при } x = \xi_0,$$

$$\text{при } x = 1 - \xi_1,$$

та початкові умови при  $\tau = \tau_1$

$$\theta_1 = 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$\xi_0 = \xi_1 = 0$$

Через  $\xi_0$  й  $\xi_1$  у виписаних співвідношеннях позначено координати фронтів кристалізації еквівалентного вилівка (або вилівка з чистого металу), що рухаються назустріч  $T_{cr}$  один одному

з початковою умовою

відповідно згідно критерію від його поверхні ( $\xi_0$ ) і з боку кокілю ( $\xi_1$ ), а величини  $L_0$  та  $L_1$  визначаються за формулами затверділого виливка

Визначити температурне поле затверділого виливка в процесі його охолодження в кокілі як розв'язок рівняння теплопровідності

$$\theta_1 = \theta_1'', \quad 0 < x < 1, \quad \tau_s < \tau < \tau_f,$$

який задовольняє граничні умови

$$\theta_1' + B_{01}\theta_1 = B_{01}\theta_{01} \quad \text{при } x=0,$$

$$\theta_1' + B_{21}\theta_1 = B_{21}\theta_c \quad \text{при } x=1$$

та початкову умову при  $\tau = \tau_s$ ,

$$\theta = \varphi_1(x), \quad 0 < x < 1,$$

де  $\varphi_1(x)$  – розв'язок крайової задачі 2.2 в момент часу  $\tau = \tau_s$ .

#### 2.4. Крайова задача про нагрівання кокілю

Визначити температурне поле кокілю, котрий нагрівається в процесі зняття перегріву розплаву, кристалізації, твердіння та охолодження в кокілі виливка, як розв'язок рівняння теплопровідності

$$\dot{\theta}_2 = k\theta_2'', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \tau < \tau_f, \quad k = \frac{a_2}{a_1},$$

який задовольняє граничні умови

$$\theta_2' - B_{12}\theta_2 = B_{12}\theta_c \quad \text{при } x=0,$$

$$\theta_2' + B_{02}\theta_2 = 0 \quad \text{при } x=1$$

та початкову умову при  $\tau = 0$

$$\theta_2 = \theta_{20}, \quad 0 < x < 1,$$

де  $B_{02}$  та  $B_{12}$  – числа Біо, які характеризують теплообмін відповідно між поверхнею кокілю й середовищем ззовні кокілю та ізоляційною фарбою, яка заповнює зазор між виливком і кокілем. Ці числа розраховуються за відомими [2] формулами

$$B_{02} = \frac{\alpha_{02}l_2}{\lambda_2}, \quad B_{12} = \frac{\alpha_{12}l_2}{\lambda_2}, \quad \alpha_{12} = \beta \frac{\theta_{cr} - \theta_{20}}{\theta_c - \theta_{20}}.$$

#### 2.5. Крайова задача про охолодження кокілю після видалення виливка

Визначити температурне поле кокілю при його охолодженні після видалення з нього виливка як розв'язок рівняння теплопровідності

$$\dot{\theta}_2 = k\theta_2'', \quad 0 < x < 1, \quad \tau > \tau_f,$$

який задовольняє граничні умови

$$\theta_2' - B_{02}\theta_2 = 0 \quad \text{при } x=0,$$

$$\theta_2' + B_{02}\theta_2 = 0 \quad \text{при } x=1$$

та початкову умову при  $\tau = \tau_f$

$$\theta_2 = \varphi_2(x), \quad 0 < x < 1,$$

де  $\varphi_2(x)$  – розв'язок крайової задачі 2.4 при  $\tau = \tau_f$ .

### 3. Основні розрахункові формули

Ці формули дають можливість визначити всі величини, що представляють практичний інтерес: характерні для даного процесу кристалізації проміжки часу (наприклад,  $\tau_1$ ,  $\tau_s$ ), координати рухомих фронтів кристалізації для чистого металу або фронтів ліквідусу й солідусу для сплаву, швидкостей переміщення зазначених фронтів, температурні поля виливка й кокілю тощо. При цьому більшість із перелічених величин для свого визначення потребують використання універсального співвідношення [3], яке встановлює зв'язок між безрозмірним часом  $\tau$ , показником  $n$  параболи, що апроксимує температурне поле відносно просторової координати, числом  $B$  Біо, параметром  $L$ , пов'язаним з питомою теплотою кристалізації (звісно, якщо явище

кристалізації має місце в розглядуваному процесі), та абсцисою  $\xi$  фронту кристалізації чи розповсюдження тепла

$$\tau = f(n, \xi, B, L) = A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \ln(1 + \xi B / n),$$

$$A_1 = \frac{1}{B} \left( L + \frac{1}{n+1} \right), \quad A_2 = \frac{1}{2n} BA, \quad A_3 = -\frac{n}{n+1} \frac{1}{B^2}.$$

Зауважимо, що в наведених співвідношеннях параметр  $L$  слід покласти рівним нулю, якщо явище кристалізації не має місця в розглядуваному процесі. Крім того, параметри  $\xi$ ,  $B$  та  $L$  в залежності від конкретного застосування наведеної формули записуватимуться з відповідними індексами; показнику  $n$  надаватиметься значення 1 чи 2 відповідно для вилівка чи кокілю.

### 3.1. Калориметрична температура

При визначенні калориметричної температури  $\theta_c$  вважається, що після зняття перегріву розплаву одна частина тепла вилівка виноситься через його внутрішню поверхню, а інша частина – через зовнішню поверхню і кокіль. Саме ця інша частина тепла і враховується при обчисленні калориметричної температури  $\theta_c$ . При цьому величина  $\theta_c$  визначається одночасно з абсцисою  $\xi$  точки зустрічі фронтів кристалізації у випадку вилівка із чистого металу (або еквівалентного вилівка у випадку вилівка зі сплаву металів) як корені такої системи нелінійних рівнянь,

$$(\theta_{10} + L_{00})(1 - \xi) + m\theta_{20} - (1 + m - \xi)\theta_c = 0,$$

$$m = \frac{\rho_2 c_2 l_2}{\rho_1 c_1 l_1}.$$

Інформація про величину  $\xi$  дозволяє обчислити й момент часу  $\tau_s$  затвердіння вилівка за формулою

$$\tau_s = f(1, \xi, B_{01}, L_0).$$

### 3.2. Температурне поле вилівка

В залежності від стадії [3] охолодження вилівка в процесі його формування для опису температурного поля вилівка використовуються розв'язки вище сформульованих задач (Коші чи крайових). Не зупиняючись на деталях, наведемо формули, які описують температурне поле вилівка як функцію просторової координати  $x$  та часу  $\tau$  на стадіях зняття перегріву розплаву, кристалізації та охолодження вилівка в кокілі (протягом цих стадій відбувається нагрівання кокілю).

#### 3.2.1. Зняття перегріву

Температурне поле вилівка на розглядуваній стадії визначається як розв'язок задачі 2.1 Коші у функції тільки від змінної  $\tau$ , тобто

$$\theta_1(\tau) = \frac{A}{\omega} + (\theta_{10} - \frac{A}{\omega}) \exp(-\omega\tau),$$

$$A = B_{01}\theta_{01} - B_{21}\theta_c,$$

$$\omega = B_{21} - B_{01}.$$

Момент часу  $\tau_1$ , при якому миттєво залитий у кокіль перегрітий розплав, охолоджується у кокілі, досягне температури кристалізації, неважко знайти з умови  $\theta_1(\tau_1) = 1: \omega$

#### 3.2.2. Кристалізація розплаву

Температурне поле вилівка на стадії його твердіння, тобто при  $\tau_1 < \tau < \tau_s$ , визначається за формулами

$$y(x, \tau) = \begin{cases} (1 + xB_{01}) / (1 + \xi_0 B_{01}) & 0 \leq x < \xi_0 \\ 1 & \text{при } \xi_0 \leq x \leq 1 - \xi_1 \\ (1 + (1-x)B_{21}) / (1 + \xi_1 B_{21}) & 1 - \xi_1 < x \leq 1 \end{cases}$$

### 3.3. Температурне поле кокілю

Значення координат  $\xi_0$  і  $\xi_1$  фронтів кристалізації, що фігурують у наведених формулах, як функцій часу  $\tau$  знаходяться шляхом обернення таких співвідношень

Геометрично у координатах  $Ox\theta$  при  $\tau_1 < \tau < \tau_2$  температурне поле виливка представляється у вигляді триланкової ламаної, складеної відрізками прямих ліній. Найбільш простою ця ламана є стосовно до виливка, що кристалізується при сталій температурі: на зазначеному графіку слід відзначити нулі три функцій  $P_1(0, \theta_1(0, \tau))$ ,  $P_2(\xi_0, 1)$ ,  $P_3(1 - \xi_1, 1)$ ,  $P_4(1, \theta_1(1, \tau))$ , де

$$\theta_1(1, \tau) = \theta_c + (1 + (1 - \xi_1)B_{21})(1 - \theta_c),$$

а потім сполучити ці точки відрізками прямих. В момент затвердіння виливка приточки  $P_2$  і  $P_3$  зіллються в одну точку й, таким чином, горизонтальна ланка ламаної – відрізок  $P_2P_3$  стягнеться в точку, а триланкова ламана перетвориться у дволанкову.

#### 3.2.3. Охолодження виливка в кокілі

Після повного затвердіння виливка процес його охолодження триває і тому подальше перебування виливка в кокілі супроводжується охолодженням температури, яка при  $\tau_s < \tau < \tau_f$  визначається за аналогічними вищенаведеним формулами

$$\theta(x, \tau) = \begin{cases} (1 + xB_{01}) / (1 + \xi B_{01}) & \text{при } 0 \leq x \leq \xi \\ (1 + (1 - x)B_{21}) / (1 + \xi B_{21}) & 1 - \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

в яких  $\xi$ , нагадаємо, є абсцисою точки зустрічі фронтів кристалізації.

Визначення температурного поля кокілю здійснюється за схемою, цілком аналогічною такій, яку використано при описі температурного поля виливка. При цьому відомі спрощення розрахунків обумовлені відсутністю в кокілі фронтів кристалізації рідкого ядра, характерних для виливка, що кристалізується. Правда, для просторової апроксимації температурного поля кокілю прийняті не прямі лінії, як у випадку виливка, а квадратичні параболи.

На відміну від виливка при вивченні температурного поля кокілю в залежності від технології виготовлення виливка розрізняють одну чи дві стадії: тільки нагрівання кокілю, якщо згадана технологія не передбачає вилучення виливка з кокілю після його затвердіння чи нагрівання кокілю за час перебування в ньому виливка, та наступне охолодження після вилучення виливка з кокілю.

#### 3.3.1. Нагрівання кокілю

Нагрівання кокілю поділяється на два періоди [3], протягом першого з яких зростає товща прогрітого поверхневого шару, а протягом другого – температура кокілю змінюється по всьому об'єму (щоправда, із різною швидкістю). У зв'язку з цим доцільно ввести до розгляду момент часу  $\tau_2$ , що характеризує кінець першого періоду і визначається за формулою

в якій використано визначені вище величини (див. пункт 2.4).

##### 3.3.1.1. Перший період

Цей період триває при  $0 \leq \tau < \tau_2$ ; просторова змінна  $x$  при цьому не перевищує величини  $\xi_2 = \xi_2(\tau)$ , тобто  $0 \leq x < \xi_2 < 1$  (причому  $\xi_2(\tau)$  знаходиться) шляхом обернення співвідношення  $\tau = f(2, \xi_2, B_{12}, 0)$ . Температурне поле  $(\theta_2(x, \tau))$  кокілю визначається наступним чином:

Значимо, що при  $\xi_2 \leq x \leq 1$  поле  $\theta_2(x, \tau) \equiv \theta_{20}$ .

### 3.3.1.2. Другий період

$$\theta_2(x, \tau) = \theta_c + (\theta_c - \theta_{20})z(x, \tau),$$

Триває при  $\tau \leq \tau_f$  і  $0 \leq x \leq 1$ . Температурне поле  $\theta_2(x, \tau)$  визначається за формулою

### 3.3.2. Охолодження кокілю після видалення виливка

Цей процес має місце при  $\tau > \tau_f$  і температурне поле кокілю – функція  $\theta_2(x, \tau)$  – знаходиться як розв'язок крайової задачі 2.5, причому початковий звичайний функції  $\theta_2(x, \tau)$  при  $\tau = \tau_f$ , тобто  $\theta_2(x)$ , визначається за останньою з наведених формулою. За цих умов справедливим є співвідношення

для визначення спадання температури кокілю при його охолодженні після вилучення виливка.

### 3.4. Координати переміщення фронтів ліквідуса й солідуса [3]

Стосовно до циліндричного порожнинного виливка зі сплаву металів в наявності існують дві перехідні двофазні області, відмежовані від рідкого ядра та затверділих частин виливка фронтами ліквідуса і солідуса, які у процесі кристалізації та твердіння виливка рухаються назустріч одна одній від внутрішньої й зовнішньої його поверхонь. Координати зазначених фронтів ліквідуса –  $\xi_{0L}$ ,  $\xi_{1L}$  – і солідуса –  $\xi_{0S}$ ,  $\xi_{1S}$  – визначаються за методом еквівалентного виливка після

знаходження (див. п. 3.2.2) координат  $\xi_0$  і  $\xi_1$  фронтів кристалізації цього фіктивного виливка (нагадаємо, що індексами 0 і 1 відзначені координати фронтів, які рухаються відповідно від внутрішньої зовнішньої поверхонь виливка). При цьому розрахункові формули мають вигляд таких співвідношень [3]:

$$\xi_{0S} = \xi_0 - \frac{\theta_{cr} - \theta_S}{\theta_{cr} - \theta_{01}} \left( \xi_0 + \frac{1}{B_{01}} \right),$$

$$\xi_{1L} = \xi_1 + \frac{1 - \theta_{cr}}{\theta_{cr} - \theta_{01}} \left( \xi_1 + \frac{1}{B_{21}} \right),$$

$$\xi_{1S} = \xi_1 - \frac{\theta_{cr} - \theta_S}{\theta_{cr} - \theta_{01}} \left( \xi_1 + \frac{1}{B_{21}} \right).$$

В наведених співвідношеннях через  $\theta_S$  позначено безрозмірну температуру солідуса.

### 3.5. Швидкості переміщення фронтів кристалізації

Наявність двох фронтів кристалізації розплаву при охолодженні й твердінні виливка в кокілі пов'язана з необхідністю визначення і двох швидкостей переміщення вказаних фронтів при вивченні кінетики процесу твердіння виливка. Позначивши через  $u_0$  та  $u_1$  швидкості переміщення фронтів кристалізації від внутрішньої та зовнішньої поверхонь виливка відповідно, неважко встановити формули для швидкостей  $u_0$  та  $u_1$  шляхом диференціювання за часом  $\tau$  координат  $\xi_0$  та  $\xi_1$  згаданих фронтів кристалізації. Беручи до уваги факт співпадіння з точністю до  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}B + (1+B+2A)\xi + 2AB\xi^2$  до позначення формул для координат  $\xi_0$  та  $\xi_1$  (див. пп. 3.2.2, 2.2), достатньо навести тут загальну формулу

за допомогою якої можна обчислити  $i$   $u_0$ ,  $i$   $u_1$ , якщо під  $\xi$  маємо на увазі  $\xi_0$  чи  $\xi_1$ , під  $B$  –  $B_{01}$  чи  $B_{21}$ , а коефіцієнти  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , визначити у відповідності з рекомендаціями пп. 3.2, 3.2.2.

#### 4. Ілюстративний приклад

Для демонстрації потенційних можливостей щойно розробленої математичної моделі розглянемо задачу про твердіння та охолодження порожнинного циліндричного виливка, що виготовляється методом відцентрового лиття в масивний металевий кокілю на установці ротативного типу. Використання такої установки передбачає можливість автоматизації та неперервності технологічного процесу при серійному виробництві виливків розглядуваного типу. При цьому вважається, що наперед заданими є:

- параметри навколишнього середовища;
- теплофізичні характеристики матеріалів виливка та кокілю;
- температура  $T_f$  вибивки виливка з кокілю;
- тривалість  $\tau_e$  циклу виготовлення виливка;
- безрозмірна абсциса  $\xi$  зустрічі фронтів кристалізації;
- відношення  $r_\tau$  проміжку  $\tau_f$  часу перебування виливка в кокілі (від моменту миттєвого заповнення кокілю розплавом до моменту вибивки затверділого виливка з кокілю) до проміжку  $\tau_e - \tau_f$  часу, протягом якого кокілю готують до його наступного заповнення розплавом (об'єднання цих проміжків і становить цикл виготовлення одного окремого виливка на установці ротативного типу);
- початкова температура кокілю в кожний момент заповнення його розплавом є сталою (іншими словами, хоча температура кокілю і змінюватиметься протягом циклу виготовлення виливка, проте її значення на початку та в кінці циклу має бути одним і тим же).

Решта параметрів технологічного процесу виготовлення виливка має бути визначена шляхом розрахунків за

допомогою ЕОМ із застосуванням вище отриманих формул.

#### 4.1. Вихідні дані

##### 4.1.1. Параметри виливка

матеріал.....	чавун
густина, кг/куб.м.....	7200
теплоємність, Дж/кгК.....	560
теплопровідність, Вт/мК.....	42
температуропровідність, кв.м/с.....	1.04e-05
внутрішній радіус, м.....	0.05
зовнішній радіус, м.....	0.06
товщина виливка, м.....	0.01
теплота кристалізації, кДж/кг.....	215
абсциса зустрічі фронтів, м.....	0.058
температура, К	
початкова розплаву.....	1620
ліквідусу.....	1570
солідусу.....	1420
кристалізації.....	1495
вилучення виливка з кокілю.....	920

##### 4.1.2. Параметри кокілю

матеріал.....	титан
густина, кг/куб.м.....	3150
теплоємність, Дж/кгК.....	712
теплопровідність, Вт/мК.....	8.5
температуропровідність, кв.м/с.....	3.79e-06
внутрішній радіус, м.....	0.06
зовнішній радіус, м.....	0.07
товщина стінки, м.....	0.01

##### 4.1.3. Інші параметри

ізоляційна фарба... багатокomпонентна, № 3	
товща ізоляції, м.....	0.001
теплопровідність ізоляції, Вт/мК.....	0.2
температура ззовні кокілю, К.....	290
відношення проміжків часу (вилівок в/поза кокілем).....	4/5

#### 4.2. Розрахункові дані

температура, К	
усередині виливка.....	1070
кокілю (початкова).....	470
калориметрична.....	875.6
коефіцієнт тепловіддачі, Вт/кв.мК	



Певну додаткову інформацію стосовно температурних полів термодинамічної системи “виливок – кокіль” та вибору значень часових проміжків (момент вилучення затверділого вилівка з кокілю, тривалість виробничого циклу виготовлення окремого вилівка на

установці ротативного типу) можна отримати з рис. 1-5, на яких представлено (щоправда, в безрозмірній формі) деякі з розрахункових результатів, одержаних на ЕОМ за допомогою розробленої математичної моделі процесів затвердіння та охолодження порожнинного

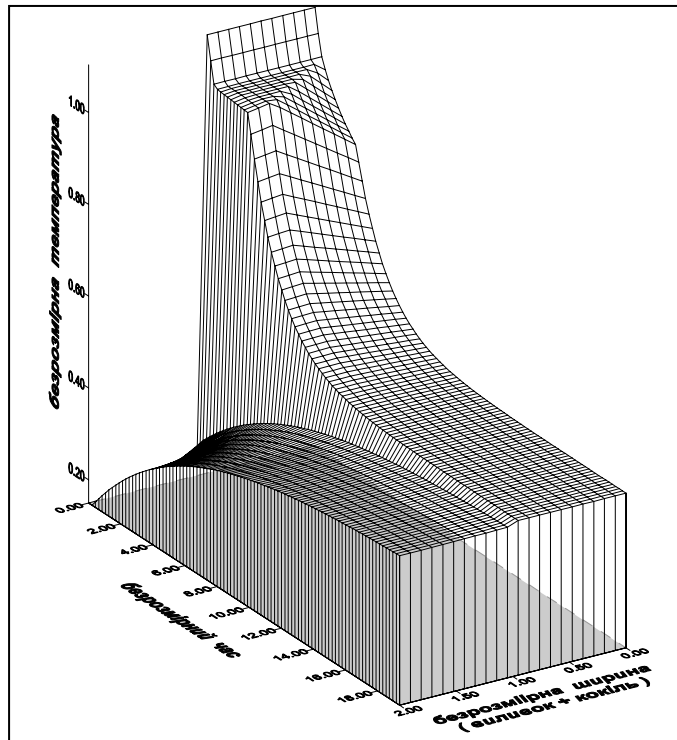


Рис. 1. Температурне поле термодинамічної системи “виливок – кокіль” при охолодженні затверділого вилівка в кокілі

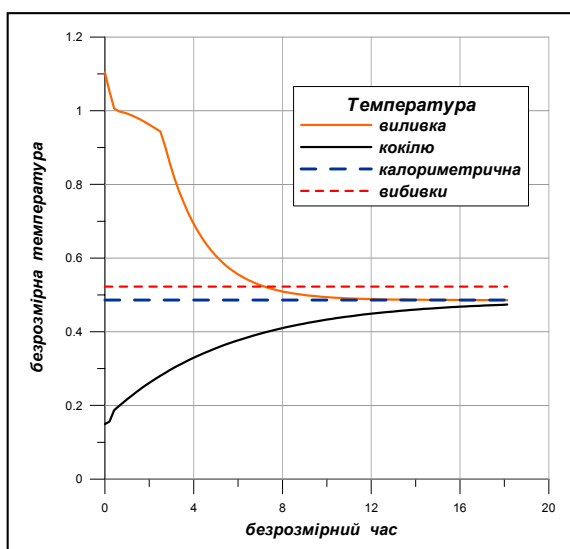


Рис. 2. Зміна в часі серединної (по ширині вилівка чи кокілю) температури вилівка й кокілю

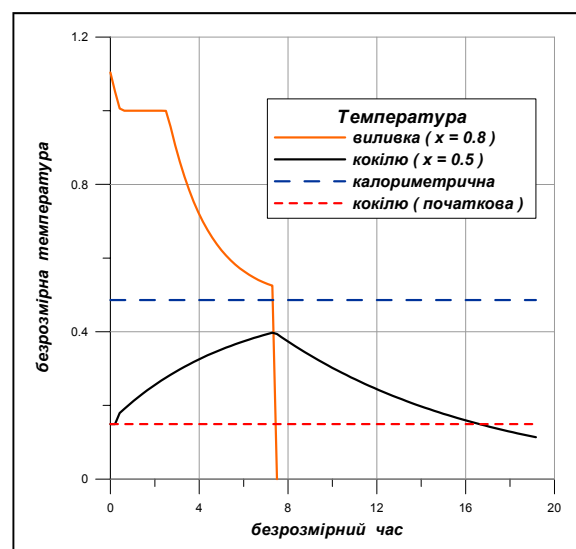


Рис. 3. Зміна в часі температури вилівка (до вилучення з кокілю) та температури кокілю (упродовж циклу виготовлення вилівка на ротативній установці)

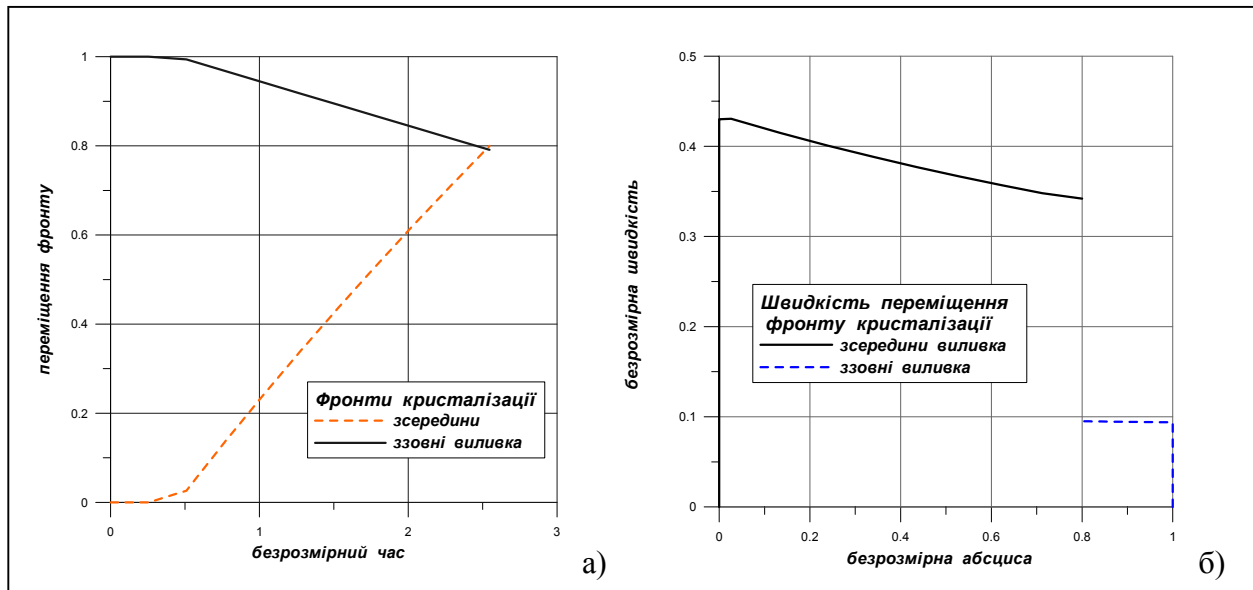


Рис. 4. Кінетика твердіння виливка:  
 а) положення фронтів кристалізації;  
 б) швидкості переміщення фронтів кристалізації

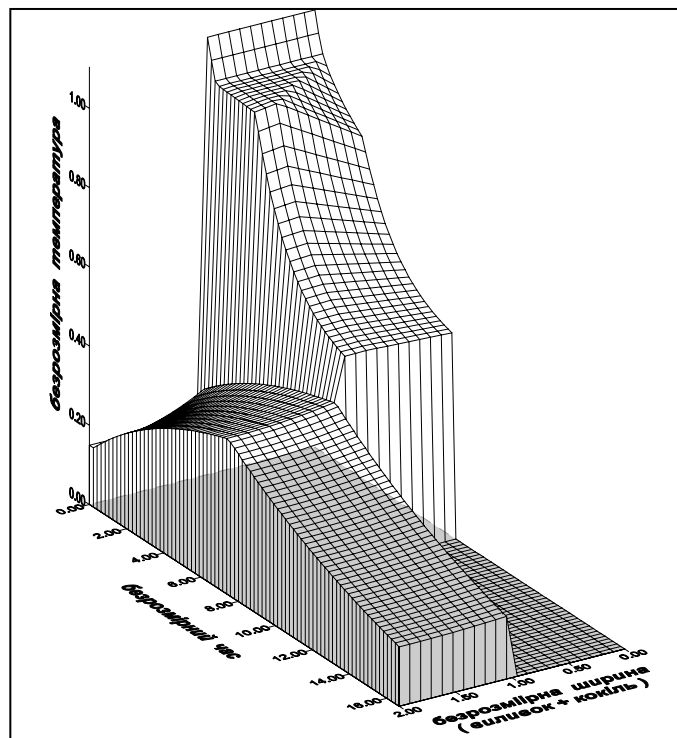


Рис. 5. Температурне поле термодинамічної системи "вилівок – кокіль" (при вилученні виливка з кокілю) упродовж циклу виготовлення виливка на ротативній установці

## 5. Висновки

**5.1.** Створено математичну модель процесів кристалізації та охолодження порожнинного циліндричного виливка при відцентровому литті в масивний металевий

кокіль, яка зводиться до знаходження розв'язку однієї задачі Коші та низки нестационарних крайових задач теорії теплопровідності.

**5.2.** Шляхом залучення фундаментальної концепції калориметричної температури в

поєднанні з методом еквівалентного виливка (що використовується в разі, коли матеріалом виливка є не чистий метал, а сплав металів) подолано деякі з істотних математичних труднощів, зумовлених наявністю рухомих фронтів кристалізації та отримано наближені розв'язки згаданих задач математичної фізики.

**5.3.** Потенційні можливості запропонованої математичної моделі продемонстровано на прикладі вибору термодинамічних параметрів з метою вдосконалення технологічного процесу при серійному виготовленні розглядуваних виливків на установці ротативного типу, причому задачу про вказаний вибір параметрів розв'язано з урахуванням специфічних вимог, що наперед заданими мають бути:

- безрозмірна абсциса зустрічі фронтів кристалізації всередині виливка;

- одне й те ж стале значення температури кокілю на початку та в кінці виробничого циклу виготовлення кожного окремого виливка; відношення проміжку часу перебування виливка в кокілі до проміжку часу, протягом якого кокіль готують до його наступного заповнення розплавом.

**5.4.** Отримані в роботі за допомогою моделі результати розрахункового характеру в цілому не суперечать як сучасним уявленням теорії формування виливка при розглядуваному способі лиття, так і експериментальним даним, накопиченим виробничою практикою; зазначене свідчить, що розроблена математична модель адекватно відображає реальні співвідношення в модельованих фізичних процесах, а тому може рекомендуватись до використання в

## Література

1. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки: В 2 ч. – Ч. 1. Тепловые основы теории. Затвердевание и охлаждение отливки. – М.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
2. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.
3. Вейник А.И. Теория затвердевания отливки. – М.: Машгиз, 1960. – 436 с.
4. Klimenko L., Kondratenko Y., Dykhta L., Andreev V. Mathematical simulation for solidification of the hollow cylindrical casting under centrifugal permanent-mould casting. Polish Academy of Sciences, Branch Katowice. Archives of Foundry, Vol. 3, No. 7, 2003. – P. 33-39.