

Використання LU-перетворення при розв'язанні нестационарних диференціальних рівнянь у частинних похідних

Запропоновано використання LU-перетворення при розв'язанні нестационарних рівнянь у частинних похідних. Показана його перевага перед методом Гаусса та методом прогонки. Наведено алгоритм розв'язання рівняння теплопровідності.

The LU-transform is proposed for numerical solution of non-stationary part differential equations, its advantage is shown. The algorithm of the solution of heat conduction equation is given.

У більшості випадків неможливо отримати рішення диференціальних рівнянь у частинних похідних в аналітичному вигляді за допомогою елементарних або спеціальних функцій. Тому важливо чисельне розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, яке дає можливість отримати розв'язок у вигляді значень шуканої функції у визначених точках координат для визначених моментів часу (часових шарків). Найбільш часто використовується для цього метод сіток, або метод скінчених різниць.

Метод сіток полягає у наступному [2]:

- розбивка суцільної області рішення на дискретний набір точок за координатами і за часом;

- представлення частинних похідних скінченими різницями;

- перехід від диференціального рівняння для суцільної області рішення до системи алгебраїчних рівнянь для дискретного набору точок. Система алгебраїчних рівнянь, яку ми отримуємо, частіше – лінійна система вигляду $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, у якій матриця коефіцієнтів \mathbf{A} не змінюється при переході від поточного шарку часу до наступного, а змінюється лише вектор вільних членів \mathbf{B} .

- розв'язання системи алгебраїчних рівнянь на ЕОМ.

Система алгебраїчних рівнянь, яку ми отримуємо, частіше усього – це лінійна система алгебраїчних рівнянь, яка

розв'язується методом Гаусса, або методом прогонки [2; 3]. Однак метод прогонки можна використовувати, коли матриця коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь має тридіагональну форму. Але матриця коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь має тридіагональну форму тільки при зміні однієї координати \mathbf{X} . У цьому випадку систему можна розв'язувати методом прогонки. Але у випадку зміни двох або трьох координат матриця коефіцієнтів не має тридіагональну форму і метод прогонки використовувати не можна.

При розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса матриця коефіцієнтів \mathbf{A} приводиться до верхньотрикутної матриці, але у перетворенні беруть участь і вільні члени системи рівнянь. Тому перетворення виконуються на кожному часовому шарі.

Такі задачі краще розв'язувати методом LU-розкладання, де матрицю коефіцієнтів \mathbf{A} розкладаємо на верхню трикутну \mathbf{U} та нижню трикутну \mathbf{L} так, щоб $\mathbf{A}=\mathbf{L}*\mathbf{U}$. Розкладання виконуємо тільки 1 раз на першому часовому шарі. При переході на 2, 3... часові шари використаємо матриці \mathbf{L} , \mathbf{U} , які ми вже отримали, підставляючи тільки нові значення вільних членів у формули знаходження розв'язку системи. Метод LU-розкладання має суттєву перевагу при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо треба розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь багато разів при різних значеннях

вільних членів і не змінній матриці коефіцієнтів \mathbf{A} . Розкладання виконуємо тільки 1 раз, а при використанні методу Гаусса матриця коефіцієнтів \mathbf{A} приводиться до верхньотрикутної матриці для кожного значення вектора вільних членів.

Розглянемо як приклад рівняння теплопровідності $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t)$, яке часто використовується в екологічних та технічних задачах:

Початкові умови $V_i^0 = \varphi(x_i)$; крайові умови $V_0^j = \psi_1(t)$; $V_{NX}^j = \psi_2(t)$.

У формулі використані такі позначення: V_i^j – значення невідомої функції на j -му часовому шарі у i -й точці по координаті X , NX – число точок по координаті X , NT – число часових шарів, h_x – крок по координаті X , τ – крок по часу, α – коефіцієнт теплопровідності, $\psi_1(t)$ – крайові умови у точці $X=0$ в залежності від часового шару, $\psi_2(t)$ – крайові умови у точці $X=Nx \cdot h_x$ в залежності від часового шару, $\varphi_1(X_i)$ – значення шуканої функції у початковому шарі по часу.

При зображенні похідних скінченими різницями і використанні неявної чисельної схеми інтегрування на h_x кожному j -му часовому шарі маємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\lambda V_{i-1}^j - (1+2\lambda)V_i^j + \lambda V_{i+1}^j = -V_i^{j-1} - f_i^j$$

Або у результаті маємо таку систему алгебраїчних рівнянь на $\frac{\alpha \tau}{h_x^2}$ кожному j -му часовому шарі:

$$\text{для } i = 1 \dots NX-1,$$

Позначимо A_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, яку ми отримуємо при заміні частинних похідних скінченими різницями, b_i – елементи вектора вільних членів системи алгебраїчних рівнянь.

Це система лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої має

тридіагональну форму тільки при зміні однієї координати. У цьому випадку систему можна розв'язати методом прогонки. Але у випадку зміни двох або трьох координат матриця коефіцієнтів не має тридіагональну форму і метод прогонки використовувати не можна. Тому такі задачі краще розв'язувати методом LU-розкладання, де матрицю коефіцієнтів \mathbf{A} розкладаємо на верхню трикутну \mathbf{U} та нижню трикутну \mathbf{L} так, щоб $\mathbf{A}=\mathbf{L}*\mathbf{U}$. Розкладання виконуємо тільки 1 раз на першому часовому шарі, а на 2,3... часових прошарках використаємо матриці \mathbf{L} , \mathbf{U} , які ми вже отримали, підставляючи тільки нові значення вільних членів у формули знаходження рішення системи.

Алгоритм розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних має такий вигляд:

1. Завдання $NT, NX, h, \tau, \lambda, \varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t)$.
2. Заповнення нульового шару по часу $V_i^0 = \varphi(x_i)$.
3. $J = 1$.
4. Знаходження значень функції в крайових точках $V_0^j = \psi_1(t_j)$; $V_{NX}^j = \psi_2(t_j)$.
5. Якщо $J > 1$, то переходимо на пункт 7.
6. Формування матриці коефіцієнтів \mathbf{A} та її розкладання на нижню трикутну матрицю \mathbf{L} і верхню трикутну матрицю \mathbf{U} . Для розкладання матриці \mathbf{A} використовуємо алгоритми Краута, або LU-row [1].
7. Знаходження елементів вектора вільних членів:

$$b_i = -V_i^{j-1} - f_i^j,$$

$$b_1 = -V_1^{j-1} - \lambda V_0^j - f_1^j,$$

$$b_{NX-1} = -U_{NX-1}^{j-1} - \lambda U_{NX}^j - f_{NX-1}^j.$$

$$(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} * z_k)$$

8. Отримання $\frac{1}{L_{ii}}$ рішення системи рівнянь $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$.

Оскільки, $\mathbf{A}=\mathbf{L}*\mathbf{U}$, тоді $\mathbf{L}*\mathbf{U}*\mathbf{X}=\mathbf{B}$. Позначимо $\mathbf{UX}=\mathbf{Z}$, тоді $\mathbf{LZ}=\mathbf{B}$. Завдяки нижньотрикутній формі матриці \mathbf{L} легко знайти \mathbf{Z} ; $z_1 \in \mathbf{B}_1$; $\sum_{k=1}^{i-1} u_{i,k} * x_k$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{i,k} * x_k}{u_{ii}}, i = 2, \dots, NX-1.$$

Тепер завдяки верхньотрикутній матриці U можна знайти X , $x_{NX-1} = z_{NX-1}$;

$$, i = NX-2 \dots 1.$$

У даному випадку:

$$V_i^j = x_i, i = 1 \dots NX - 1.$$

9. Якщо $J = NT$, то кінець, інакше $J = J+1$ та йдемо на п. 4.

При використанні LU-розкладання для розв'язання хвильового рівняння матрицю коефіцієнтів A розкладаємо на верхню трикутну U та нижню трикутну L так, щоб $A=L*U$ на другому часовому шарі, з якого починаємо розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, отриманих за допомогою неявної чисельної схеми.

(Значення шуканої функції на нульовому та першому прошарках часу отримуємо з початкових умов). При переході на 3,4... часові шари використаємо матриці L , U , які ми вже отримали, підставляючи тільки нові

значення вільних членів у формули знаходження розв'язку системи.

Висновок

Таким чином, використання методу LU-розкладання при розв'язанні нестационарних рівнянь у частинних похідних має суттєву перевагу над використанням методів прогонки або Гаусса, оскільки:

- він не вимагає від матриці коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь тридіагональної форми як методу прогонки;
- розкладання виконуємо тільки 1 раз на першому або другому часовому шарі. При переході на наступні часові шари використовуємо матриці L , U , які ми вже отримали, підставляючи тільки нові значення вільних членів у формули знаходження розв'язку системи. При використанні ж методу Гаусса матриця коефіцієнтів A приводиться до верхньотрикутної матриці для кожного значення вектора вільних членів на кожному прошарку часу.

Література

1. Влах Д., Сингал Дж. Машинні методи аналізу електронних кіл (алгоритми і методи обчислень). – М.: Енергія, 1990. – 575 с.
2. Турчак І.В. Основи чисельних методів. – М.: Наука, 1991.
3. Кравець І.О. Методи обчислень: Навчальний посібник зі спеціальності «Інтелектуальні системи прийняття рішень» для виконання практичних робіт. – Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 2001.
4. Демірчян К.С., Бутирін П.А. Моделювання і машинні обчислення електричних ланцюгів. – М.: Вища школа, 1990. – 334 с.
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинні методи обчислень. – М.: Мир, 1980. – 400 с.
6. Хімелблау Д. Прикладне математичне програмування. – М.: Мир, 1975. – 510 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2004 р.