УДК 681.3:007.52

Ходаков В.Є., Граб М.В., Херсонський державний технічний університет

Моделювання розповсюдження лісової пожежі

Описується підхід до розв’язання задачі динаміки лісової пожежі. Пожежа в кожний момент часу зображується як випадкова скінчена множина. Для моделювання розвитку пожежі використовується множинний метод Монте-Карло. Приблизна оцінка геометричної форми пожежі здійснюється з допомогою середньомірної множини.

The approach to forest fire spreading task decision is described in the article. In each moment of time fire is represented as discrete random set. Monte-Carlo method is used for fire spreading modeling. Approximate estimation of fire geometrical form is realized with using of measure average set.

Для зменшення збитків від лісових пожеж необхідно вміти прогнозувати його динаміку. Однак це дуже складна задача. Лісова пожежа – природне явище, що поширюється на відкритій місцевості, і отже, піддане впливові природних умов, до яких відносяться як умови місцевості, на якій розвивається пожежа, так і метеорологічні умови. Точну модель пожежі побудувати неможливо. Джерела неточностей будь-якої моделі пожежі:

1) складність і громіздкість фізичної моделі пожежі, у результаті чого потрібне розумне спрощення (загрублення) моделі;

2) неможливість точного виміру характеристик зовнішнього середовища;

3) неможливість виміру багатьох характеристик, у результаті чого вони виявляються невідомими;

4) мінливість характеристик зовнішнього середовища.

Незважаючи на неминучу неточність моделей розвитку лісових пожеж, такі моделі необхідні для оцінки (хоч і наближеної) можливих наслідків від пожежі на тій або іншій місцевості. Цю оцінку можна використовувати як для складання оперативного плану боротьби з лісовою пожежею, так і для планування заходів, спрямованих проти можливих пожеж.

Нижче описується підхід до моделювання динаміки лісових пожеж. Під динамікою лісової пожежі мається на увазі зміна конфігурації її контуру в часі. Характер протікання цього процесу залежить від настільки великого числа факторів, що практично неможливо зареєструвати й врахувати всі ці фактори. Ці численні фактори відіграють помітну роль у протіканні процесу, а разом із тим число їх таке велике і вплив настільки складний, що знехтування випадковими елементами себе не виправдає. Усе це змушує використовувати математичний апарат, що враховує невизначеність. Найбільш підходящою є імовірнісна інтерпретація процесу поширення лісової пожежі. Якщо область місцевості, на якій поширюється пожежа, дискретизувати і представити у вигляді множини окремих ділянок, то апарат теорії ймовірностей допоможе в кожен момент часу обчислити імовірність приналежності кожної окремої ділянки площі, пройденої пожежею.

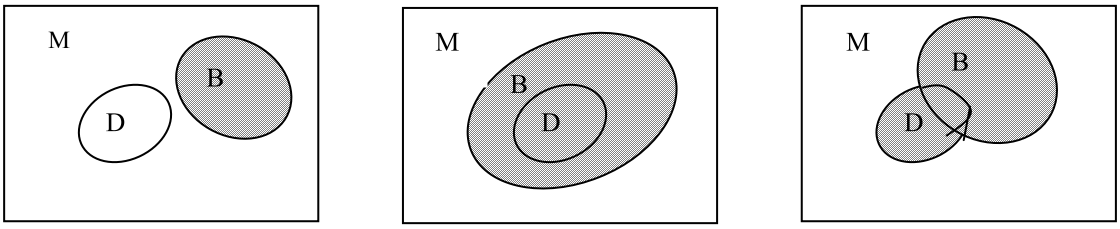
Нехай X – двовимірний евклідовий простір, що моделює область місцевості, на якій поширюється пожежа, спроектованої на горизонтальну площину. Простір X складається з такої величезної кількості елементів, що практична робота з ними вимагає використання наближення – заміни X апроксимаційним простором меншого числа елементів. Кожний апроксимаційний простір буде підмножиною найбагатшого простору кінцевих множин $\sum(X)$ – алгебри, що містить усі підмножини X. Як апроксимацію простору X розглянемо набір його підмножин $M = \{D : D \subset X\}$, причому $M \subset \sum(X)$. Нехай набір M є *диз'юнктивним* [1], тобто $D \cap D' = \varnothing \; \forall D, D' \in M$. Припустимо, що M є *покриттям* X, тобто $X = \bigcup_{D\in M} D$, а оскільки M – диз'юнктивний набір, то $X = \sum_{D\in M} D$.

Нехай $\Sigma(M)$ – множина усіх підмножин M. З диз'юнктивності набору M випливає його однозначність по об'єднанню:

$$\bigcup_{D\in D'} D = \bigcup_{D\in D''} D \Leftrightarrow D' = D'' \;\forall D', D'' \in \sum(M)$$

($\Leftrightarrow$ – операція еквівалентності).

Уведемо деякі позначення й визначення. Класи скінчених підмножин виду $D^0 = \{B \in \Sigma(X) : B \cap D = \varnothing\}$, $D^1 = \{B \in \Sigma(X) : B^c \cap \cap D = \varnothing\}$, $D^2 = \{B \in \Sigma(X) : B \cap D \neq \varnothing, B^c \cap \cap D \neq \varnothing\}$, де $B^c = \Sigma(X) \setminus$ У («\» – операція



а б в

Рис. 1. Множина B із комірки D^0 (а), D^1 (б), D^2 (в)

Якщо $E = \{0, 1, 2\}$ – множина індексів, $B \in \Sigma(X)$, то комірка для підмножини індексів $\varepsilon \subset E$ визначається як

$$D^{\varepsilon} = \bigcup_{\alpha\in\varepsilon} D^{\alpha}.$$

Нехай F^{ε}, Φ^{ε} – алгебра і напівалгебра класів множин з $\Sigma(X)$, що породжена комірками B^{ε}, $B^{E\setminus\varepsilon}$ при $B \in \Sigma(X)$; F^{ε}_{M}, Φ^{ε}_{M} – алгебра і напівалгебра класів множин з $\Sigma(X)$, що породжена комірками B^{ε}, $B^{E\setminus\varepsilon}$ при $B \in \Sigma(M)$.

Вимірне відображення K деякого ймовірносного простору (Ω, F, P) у вимірний простір (ΣX, Φ^{ε}_{M}), де ε дорівнює 0 або 1, називається ***випадковою скінченою множиною (ВСМ)***.

Нехай ${}^{\varepsilon}P$ – імовірнісна міра, що індукована на Φ^{ε}_{M}. Тоді для завдання випадкової скінченої множини досить визначити функції [2]

$$T^{\varepsilon}(Y) = {}^{\varepsilon}P\left(Y^{E\setminus\varepsilon}\right) = \begin{cases} {}^{0}P(K \cap Y \neq \emptyset), \varepsilon = 0, \\ {}^{1}P(K^{c} \cap Y \neq \emptyset), \varepsilon = 1, \end{cases} \quad \forall Y \in \sum(M) \qquad (1)$$

Ці функції містять всю інформацію про випадкову скінчену множину $K = (M, \Phi^{\varepsilon}_{M}, {}^{\varepsilon}P)$.

Простір X можна апроксимувати набором точок $X_M = \{x\}$, кількість яких менше кількості точок вихідного простору. При цьому комірка x^2 буде порожня для усіх $x \in X_M$. Множина $K = (M, \Phi_X, P)$, яка визначається імовірностями покриття $\pi_K(x) = P(K \in \in x^1) = P(x \in K)$ і непокриття $1 - \pi_K(x) = P(K \in \in x^0)$, що у сумі дають 1 для усіх ($x \in X_M$), називається ***точковою випадковою скінченою множиною***.

Нехай $\Sigma(X_M)$ – множина усіх підмножин X_M, (X_M, $\Sigma(X_M)$, μ) – вимірний скінчений простір з обмеженою мірою, такою що $\mu(x) > 0 \forall x \in X_M$. Тоді для точкової випадкової множини можна визначити розмиту міру $\mu(K)$ [1], що є випадковою величиною з математичним очікуванням

$$E\mu(K) = \sum_{x\in X_M} \pi_K(x)\mu(x). \qquad (2)$$

Рівність (2) звичайно називають теоремою Робінса.

Нехай π_K – імовірність покриття для ВСМ K. Тоді визначені вимірні множини:

$$\{\pi_K \geq h\} = \{x \in X_M : \pi_K(x) \geq h\}, \qquad (3)$$

$$\{\pi_K > h\} = \{x \in X_M : \pi_K(x) > h\} \qquad (4)$$

– *зріз і строгий зріз функції π_K на рівні h*.

Крім того, вимірну множину

$$\operatorname{bas} K = \{\pi_K > 0\} \qquad (5)$$

$$\ker K = \{\pi_K = 1\}$$

називають *базою ВСМ K*, а вимірну множину *ядром ВСМ К.*

Тепер визначимо одну з основних статистичних характеристик ВКМ – середньомірну множину. Нехай $g(h) = \mu(\pi_K > h)$, $g_1(h) = \mu(\pi_K \geq h)$. У [1] доводиться лема: для кожного $\lambda \in [0, \mu(X_M)]$ знайдеться таке $h_l \in [0,1]$, що $\lambda \in [g(h_\lambda), g_\lambda(h_\lambda)]$.

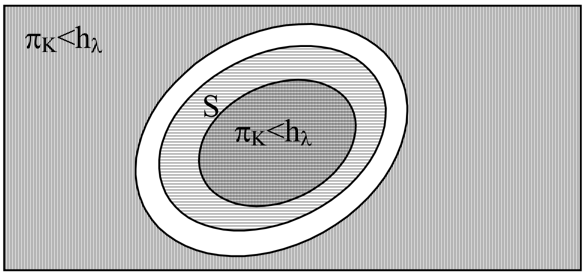


Рис. 2. Множина S із комірки $S_{h\lambda}$

Середньомірною множиною для ВСМ К називають комірку

$$\int K = \{\pi_K > h_\lambda\}^1\{\pi_K < h_\lambda\}^0,$$

де $$\lambda = E_\mu(K) \quad [1].$$

Тепер застосуємо апарат ймовірнісно-множинного моделювання до поставленої задачі.

Як уже було описано вище, величини, що характеризують місцевість, а також метеорологічні умови є випадковими. Отже, випадковими є й обчислені на їхній основі характеристики пожежі. Таким чином, у кожний момент часу на вхід моделі поширення лісової пожежі подаються випадкові характеристики. Вони можуть бути представлені:

1) за допомогою закону розподілу імовірностей (у найкращому випадку);

2) у вигляді інтервалу, тобто за допомогою завдання мінімального і максимального з можливих значень.

Тому що вхідних характеристик дуже багато, самим підходящим методом моделювання розвитку пожежі є метод Монте-Карло, а точніше – його множинна інтерпретація. Найважливіший прийом побудови множинних методів Монте-Карло – зведення задачі до розрахунку середньомірної множини.

Представимо площу, що охоплена пожежею, у виді точкового ВСМ К. Для цього диз'юнктивне покриття M представимо у вигляді решітки із квадратними комірками D, що мають однакову міру μ(D), у якості якої виступає площа квадрата. Центр кожного квадрата утворить точку $x \in X_M$, міра якої $\mu(x) = \mu(D)$.

Для того, щоб приблизно оцінити геометричну форму ВСМ К за допомогою методу Монте-Карло, необхідно обчислити N незалежних значень $K_1, K_2, \ldots, K_N$ випадкової множини K, а потім знайти середньомірну множину $\int K = K_1 K_2, \ldots, K_N$, де $\int$ позначає теоретико-множинну операцію «середнє за мірою». Очевидно, що наближена геометрична форма ВСМ К $A \in \int K$.

N значень ВСМ К $K_1, K_2, \ldots, K_N$ визначаються за допомогою N реалізацій моделі. При кожній з таких реалізацій вибираються конкретні значення випадкових параметрів. Якщо параметр заданий інтервалом, то вибирається випадкове число всередині інтервалу, якщо відомо закон розподілу імовірностей параметра, то випадковим способом вибирається число від 0 до 1 (імовірність) і потім – відповідне значення параметра.

За відомими значеннями $K_1, K_2, \ldots, K_N$ ВСМ К $\pi_K(x) = \frac{1}{N}\sum_1^N \chi_{K_i}(x)$ задається за допомогою імовірностей покриття

$$\chi_{K_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_i, \\ 0, & x \notin K_i. \end{cases},$$

де

Після завдання ВСМ К можна визначити математичне очікування його міри (2) і приблизно оцінити його геометричну форму, побудувавши середньомірну множину ∫K.

Середньомірна множина, що моделює наближену геометричну форму лісової пожежі, – характеристика динамічна. Тому шляхом імітаційного моделювання необхідно її перевизначати в кожний

Література

1. Воробьев О.Ю. Среднемерное моделирование. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
2. Sidiropoulos N., Baras J., Berenstein C. The Structure of Discrete Random Sets and Their Randomized Superpositions // Systems Research Center University of Maryland College Park, 1991. – P. 1-28.

Стаття надійшла до редколегії 22.11.2003 р.