УДК 519.3:62-50

Менько Я.П., Миколаївський державний університет ім. В.О.Сухомлинського, м. Миколаїв

Про побудову оптимального керування та оптимальної траєкторії системи лінійних диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом

В роботі асимптотичний метод С.Ф.Фещенка – М.І.Шкіля застосовується для побудови оптимального керування і оптимальної траєкторії в задачі, яка описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами та запізненням аргументу. Використовується принцип максимуму Понтрегіна для квадратичного функціоналу.

The system of linear differential equations with slowly changing coefficients, overdue delayed argument and control is considered.

Математична теорія оптимального керування оформилась в науку порівняно недавно як спеціальний розділ теорії диференціальних рівнянь. Після того, як був встановлений принцип максимуму Л.С.Понтрягіна, з'явилась тенденція розглядати теорію оптимального керування в рамках варіаційного числення.

З моменту своєї появи принцип максимуму привертає увагу багатьох спеціалістів. Справа в тому, що з кожним роком питома вага задач, пов'язаних з вибором оптимальних конструкцій, режимів і т.п., швидко зростає в різних сферах людської діяльності. Деякі із цих задач були відомі давно, але через свою складність були недоступні для ефективного розв'язку, з появою ЕОМ змінився погляд на їх складність. За короткий проміжок часу в цій області виконано ряд крупних робіт і покладено початок новим потужним методам дослідження.

Для лінійних систем принцип максимуму було доведено Р.В.Гамкрелідзе (1957 р.), дослідження якого послужили основою для гіпотези Л.С.Понтрягіна про справедливість принципу максимуму в загальному випадку ([1])

В роботах А.І.Лур'є, Р.Є.Калмана, В.А.Троїцького, Л.Берковича й інших принцип максимуму був доведений засобами класичного варіаційного числення.

Розвиток необхідних умов оптимальності йшов не тільки вглиб, але і вшир. В ряді випадків задача оптимального керування ускладнюється ефектом запізнення. Запізнення може виникати у зв'язку із затратою часу на передачу сигналу або, як це часто буває, дія проміжних і підсилюваних ланок у керованому об'єкті зводиться до передачі сигналу із запізненням.

Майже одразу ж принцип максимуму був поширений Г.Л.Харатишвілі (1961 р.) на системи з запізнення

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x(t), x(t-h), u(t), t\right), \qquad h \succ 0.$$

Є велика кількість робіт, в яких запізнення міститься в управлінні.

Питанням побудови розв'язків класичної задачі оптимального керування системами, які містять малий параметр, присвячені роботи багатьох авторів. Так, в роботах Н.К.Багірова, А.Б.Васильєвої та інших розглядається задача оптимального управління для нелінійних систем з малим параметром при старшій похідній. В роботі Ф.Л.Черноусько [9] викладена методика побудови наближеного розв'язку у вигляді ряду за степенями малого параметра для слабо керованої нелінійної системи. В роботі М.І.Шкіля, В.М.Лейфури [8] шукається асимптотичний розв'язок задачі оптимального керування для систем з повільно змінними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x(t, \varepsilon) + B(\tau, \varepsilon)U.$$

В даній роботі асимптотичний метод С.Ф.Фещенка – М.І.Шкіля ([5-7]) застосовується для побудови оптимального керування і оптимальної траєкторії системи лінійних диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом і керуванням, з повільно змінними коефіцієнтами.

1. Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом і керуванням

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + B(\tau,\varepsilon)\cdot$$
$$\cdot\, x(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + C(\tau,\varepsilon)u(t) \qquad (1)$$

початкові умови

$$x(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon), \qquad -h \le t \prec 0,$$
$$x(0,\varepsilon) = x_0, \qquad h = \max \Delta(\tau),$$
$$\tau \in [0, L]. \qquad (2)$$

Вектори

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\},$$
$$u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \ldots u_m(t)\},$$

матриці A(τ,ε), B(τ,ε) типу $n \times n$, C(τ,ε) – типу $n \times m$, φ(τ,ε) – n-мірний вектор.

Нехай виконані такі умови:

1. Матриці
$$\mathrm{A}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_\delta(\tau),$$
$$\mathrm{B}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(\tau),$$
$$\mathrm{C}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_s(\tau) \qquad (3)$$
необмежено диференційовані по τ на сегменті [0, L], τ = εt, ε – малий параметр, ε ∈ [0; ε_0].
2. Запізнення Δ(τ)>0 – необмежена диференційована функція на сегменті [0, L] і монотонно зростає на цьому сегменті.
3. Область допустимих значень для керування $u(t)$ співпадає із заданим m-мірним простором U.

Керування $u^{(0)}(t,\varepsilon)$, під дією якого система переходить із початкового положення (2) в положення (4)

$$x(T) = u^{(1)}$$

за фіксований час T, вибираємо із умови мінімуму квадратичного функціонала (5)

$$J(u) = (d, x(T)) + \frac{1}{2}\int_{O_c}^{T} (W(t,\varepsilon)u, u)dt.$$

d – фіксований, n-мірний вектор;

W(τ,ε) – додатньо визначена квадратна матриця $m \times m$, необмежено диференційована по τ на сегменті [0, L], і допускає розклад в ряд за степенями ε, тобто (6)

$$W(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s W_s(\tau).$$

Користуючись принципом максимуму Л.С.Понтрягіна, за допомогою асимптотичних методів С.Ф.Фещенка – М.І.Шкіля будується наближений розв'язок для оптимального керування і оптимальної траєкторії у вигляді розкладу в ряд за степенями малого параметра ε.

Оскільки ряди в більшості випадків виявляються розбіжними, то вони розглядаються як асимптотичні, тобто такі, що часткові суми їх прямують до точного розв'язку не із збільшенням числа їх членів, а при прямуванні малого параметра ε до нуля.

2. Визначення керування

До поставленої задачі застосуємо принцип максимуму Л.С.Понтрягіна [4]. Побудуємо функцію Гамільтона

$$H(x(t,\varepsilon), x(t-\Delta(\tau),\varepsilon), u(t), t) =$$
$$= (A(\tau,\varepsilon)x(t,\varepsilon), \psi(t,\varepsilon)) +$$
$$+ (B(\tau,\varepsilon)x(t-\Delta(\tau),\varepsilon), \psi(t,\varepsilon)) +$$
$$+ (\mathrm{C}(\tau,\varepsilon)u(t), \psi(t,\varepsilon)) - \frac{1}{2}(w(\tau,\varepsilon)u(t), u(t)), \qquad (7)$$

де $\psi(t,\varepsilon)$ – n-мірний вектор спряжених змінних.

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), x(t-\Delta(\tau)), u(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial H(x(s), y(s), u(s), s)}{\partial y},$$

Запишемо систему диференціальних рівнянь для визначення вектора $\psi(\tau,\varepsilon)$. Вона задається різними системами на відрізках [0, *T-h*] і [*T-h, T*]. На відрізку [0, *T-h*] $s = t + \Delta(\tau)$;

$$y = x(t-\Delta(\tau),\varepsilon)$$

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -A^*(\tau,\varepsilon)\psi(t,\varepsilon) -$$

$$-B^*(\tau+\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)\psi(t+\Delta(\tau),\varepsilon). \qquad (9)$$

або

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad (10)$$

На відрізку [*T-h, T*]

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -A^*(\tau,\varepsilon)\psi(t,\varepsilon), \psi(T) = -d \qquad (11)$$

або $\frac{\partial H}{\partial u}$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = C^*(\tau,\varepsilon)\psi(t,\varepsilon) - \frac{1}{2}W^*(\tau,\varepsilon)u(t) -$$

$$-\frac{1}{2}W(\tau,\varepsilon)u(t), \qquad (12)$$

(зіркою позначена операція транспонування матриці).

Для визначення керування обчислимо похідну $\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$ і прирівняємо її до нуля:

$$u = 2(W^*(\tau,\varepsilon) + W(\tau,\varepsilon))^{-1}C^*(\tau,\varepsilon)\psi(t,\varepsilon). \qquad (13)$$

де $C^*(\tau,\varepsilon)$, $W^*(\tau,\varepsilon)$ – транспоновані матриці.

Нехай для матриці $W^*(\tau,\varepsilon) + W(\tau,\varepsilon)$ існує обернена матриця. Тоді

Підставляючи (13) в (1), одержимо

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + B(\tau,\varepsilon)x(t-\Delta(\tau),\varepsilon) +$$

$$+2C(\tau,\varepsilon)(W^*(\tau,\varepsilon)+W(\tau,\varepsilon))^{-1}C^*(\tau,\varepsilon)\psi(t,\varepsilon). \qquad (14)$$

3. Знаходження вектора спряжених змінних. Характеристичне рівняння

Розв'язуючи систему (11), можна знайти початкові умови для системи лінійних диференціальних рівнянь із випередженням (9).

Характер асимптотичного зображення інтегралів цієї системи залежить від поведінки коренів $\lambda_1^{(0)}(\tau), \lambda_2^{(0)}(\tau), ..., \lambda_n^{(0)}(\tau),$ характеристичного рівняння

$$\det \Omega(\tau,\varepsilon) = \det(\lambda E + A_0^*(\tau) +$$

$$+ B_0^*(\tau)e^{\lambda\Delta(\tau)}) = 0. \qquad (15)$$

Нехай рівняння має нескінченне число коренів

$$\exp(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau))(B_0^*(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau), \psi_m(\tau)) +$$

$$+(\varphi_m^{(1)}(\tau), \psi_m(\tau)) \neq 0, \qquad (16)$$

серед яких можуть бути і кратні.

Справедлива така теорема:

Теорема

Якщо матриці $A(\tau,\varepsilon)$, $B(\tau,\varepsilon)$, скалярна функція $\Delta(\tau)$ необмежено диференційовані по $t \in [0,L]$ і виконується умова

$$\Omega_m(\tau) = \lambda_m^{(0)}(\tau)E + A_0^*(\tau) +$$

$$+ B_0^*(\tau)\exp(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau)) \qquad (17)$$

де $\varphi_m^{(1)}(\tau)$ – власний вектор матриці

$$\psi(t,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\ (u_m(\tau,\varepsilon)\exp(\int_0^t\ \lambda_m(\tau,\varepsilon)dt), \quad (18)$$

(m = 1,2…..),

відповідний власному значенню $\lambda_m^{(0)}(\tau)$, $\psi_m(\tau)$ – власний вектор спряженої матриці $\Omega^*_m(\tau)$ (m = 1,2……), то система диференціальних рівнянь (9) має формальний розв'язок вигляду

$$u_m(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\ \varepsilon^s u_m^{(s)}(\tau), \quad (19)$$

$$\lambda_m(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\ \varepsilon^s\lambda_m^{(s)}(\tau). \quad (20)$$

причому вектор $u_m(\tau,\varepsilon)$ і скалярна функція $\lambda_m(\tau,\varepsilon)$ шукаються у вигляді формальних розкладів

Для визначення коефіцієнтів формальних розкладів (19), (20) підставимо (18) в (9), одержимо тотожність

$$(A^*(\tau,\varepsilon)+\lambda_m(\tau,\varepsilon)E)u_m(\tau,\varepsilon)+$$

$$+B^*(\tau+\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)\times u_m(\tau+\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)\cdot$$

$$\cdot\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau+\varepsilon\Delta(\tau)}\ \lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau=$$

$$=\varepsilon\cdot u_m^{/}(\tau,\varepsilon). \quad (21)$$

$$B^*(\tau+\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\ \varepsilon^s\sum_{j=0}^{s}\ \frac{\Delta^{s-j}}{(s-j)!}\frac{d^{s-j}B_j^*(\tau)}{d\tau^{s-j}}; \quad (22)$$

$$u_m(\tau+\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\ \varepsilon^s\sum_{j=0}^{s}\frac{\Delta^{s-j}}{(s-j)!}\frac{d^{s-j}u_m^{(j)}(\tau)}{d\tau^{s-j}}; \quad (23)$$

Розкладемо у формальні ряди за степенями ε матрицю $B^*(\tau+\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)$, вектор $u_m(\tau++\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)$, і функцію:

$$\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau+\varepsilon\Delta(\tau)}\lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau=V(\tau,\varepsilon)=V(\tau,0)+$$

$$+V_\varepsilon^{/}(\tau,0)\frac{\varepsilon}{1!}+\frac{V_\varepsilon^{//}(\tau,0)}{2!}\varepsilon^2+..........,$$

$$V(\tau,0)=\exp(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau)); \quad (24)$$

$$V_\varepsilon^{/}(\tau,0)=\exp(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau))\cdot$$

$$\cdot(\frac{\Delta^2(\tau)}{2!}\frac{d\lambda_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}+$$

$$+\ \frac{\Delta\ \lambda_m^{(1)}(\tau)}{1!}) \quad \text{і} \quad (25)$$

Прирівняємо в тотожності (21) коефіцієнти при однакових степенях ε. Коефіцієнт при ε^0:

$$A_0^*(\tau)u_m^{(0)}(\tau)+\lambda_m^{(0)}(\tau)E\cdot u_m^{(0)}(\tau)+B_0^*(\tau)u_m^{(0)}(\tau)\exp(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau))=0; \quad (26)$$

$$\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)E+A_0^*(r)+B_0^*(\tau)\exp(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\cdot u_m^{(0)}(\tau)=0. \quad (27)$$

Коефіцієнт при ε^1:

$$A_0^*(\tau)\cdot u_m^{(1)}+A_1^*(\tau)+\lambda_m^{(0)}(\tau)E\cdot u_m^{(1)}(\tau)+\lambda_m^{(1)}(\tau)E\cdot u_m^{(0)}(\tau)+\left(B_1^*(\tau)+\Delta(\tau)\frac{dB_0^*(\tau)}{d\tau}\right)u_m^{(0)}(\tau)\cdot$$

$$\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)+B_0^*(\tau)\left(u_m^{(1)}(\tau)+\Delta(\tau)\frac{d\cdot u_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}\right)\cdot\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)+B_0^*(\tau)\cdot u_m^{(0)}(\tau)\cdot$$

$$\left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2!}\frac{d\lambda_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}+\lambda_m^{(1)}(\tau)\Delta(\tau)\right)\cdot\exp\left(\Delta(\tau)d\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)=u_m^{(0)}(\tau) \quad (28)$$

або

$$\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)E+A_0^*(\tau)+B_0^*(\tau)\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\right)u_m^{(1)}(\tau)=f_m^{(1)}(\tau), \quad (29)$$

де

$$f_m^{(1)}(\tau)=\frac{du_m^{(0)}}{d\tau}-A_1^*(\tau)\cdot u_m^{(0)}(\tau)-\lambda_m^{(1)}(\tau)\cdot u_m^{(0)}(\tau)-B_0^*(\tau)\cdot u_m^{(0)}(\tau)(\ \frac{\Delta^2(\tau)}{2!}\frac{d\lambda_m^{(0)}}{d\tau}+\frac{\lambda_m^{(1)}(\tau)}{1!}\exp\cdot$$

$$\cdot\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau)\right)-B_0^*(\tau)\frac{\Delta(\tau)}{1!}\frac{du_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}\exp\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau)\right)-\left(\Delta(\tau)\frac{dB_0^*(\tau)}{d\tau}+B_1^*(\tau)\right)u_m^{(0)}(\tau)\cdot\exp\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau)\right). \quad (30)$$

$$\left(f_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)=0, \tag{31}$$

Доведемо розв'язаність рівнянь (27), (29). Із (27) виходить, що $u_m^{(0)}(\tau)$ ($m = 1,2,\ldots$) – власний вектор матриці $\Omega_m(\tau)$, що

Тоді, підставивши в (31) значення вектора $f_m^{(1)}(\tau)$, маємо

$$\left(\frac{d\varphi_m^{(1)}(\tau)}{d\tau},\psi_m(\tau)\right)-\left(A_1^*(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)-\left(\lambda_m^{(1)}(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)-$$

$$-\left(B_0^*(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau)\frac{\Delta^2(\tau)}{2!}\frac{d\lambda_m^0(\tau)}{d\tau},\psi_m(\tau)\right)-\left(B_0^*(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau)\lambda_m^{(1)}(\tau)\Delta(\tau)\exp\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau)\right),\psi_m(\tau)\right)-$$

$$-\left(B_0^*(\tau)\Delta(\tau)\frac{d\varphi_m^{(1)}(\tau)}{d\tau}\cdot\exp\left(\lambda_m^0(\tau)\Delta(\tau)\right),\psi_m(\tau)\right)-$$

$$-\left(\left(\Delta(\tau)\frac{dB_0^*(\tau)}{d\tau}+B_1^*(\tau)\right)\varphi_m^{(1)}(\tau)\exp\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau)\right),\psi_m(\tau)\right)=0. \tag{32}$$

Тоді із співвідношення (31) знайдемо $\lambda_m^{(1)}(\tau)$:

$$\lambda_m^{(1)}(\tau)=\frac{\left(\Phi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)}{\Delta(\tau)\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}\right)\left(B_0^*(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)+\left(\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)\right)}, \tag{33}$$

де $\Phi_m^{(1)}(\tau)$ – відомий вектор.

Визначивши функцію $\lambda_m^{(1)}(\tau)$, із співвідношення (29) легко визначимо вектор $u_m^{(1)}(\tau)$

$$u_m^{(1)}(\tau)=\Omega_m^+(\tau)f_m^{(1)}(\tau), \tag{34}$$

де $\Omega_m^+(\tau)$ – псевдообернена матриця до матриці $\Omega_m(\tau)$.

Коефіцієнт при ε^2

$$\left(\lambda_m^{(0)}(\tau)E+A_0^*(\tau)+B_0^*(\tau)\exp(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\cdot u_m^{(2)}(\tau)=f_m^{(2)}(\tau), \tag{35}$$

де

$$f_m^{(2)}(\tau)=\frac{du_m^{(1)}(\tau)}{d\tau}-A_1^*(\tau)u_m^{(1)}(\tau)-A_2^*(\tau)u_m^0(\tau)-\lambda_m^{(1)}(\tau)u_m^{(1)}(\tau)-\lambda_m^{(2)}(\tau)u_m^{(0)}(\tau)-$$

$$-\left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2!}\frac{d^2B_0^*(\tau)}{d\tau^2}+\Delta(\tau)\frac{dB_1^*(\tau)}{d\tau}+B_2^*(\tau)\right)u_m^{(0)}(\tau)\exp\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)-\left(\Delta(\tau)\frac{dB_0^*(\tau)}{d\tau}+B_1^*(\tau)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\Delta(\tau)\frac{du_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}+u_m^{(1)}(\tau)\right)\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)-\left(\Delta(\tau)\frac{dB_0^*(\tau)}{d\tau}+B_1^*(\tau)\right)u_m^{(0)}(\tau)\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2}\frac{d\lambda_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}+\frac{\Delta(\tau)\lambda_m^{(1)}(\tau)}{1!}\right)-B_0^*(\tau)\left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2}\frac{d^2u_m^{(0)}(\tau)}{d\tau^2}+\frac{\Delta(\tau)}{1!}\frac{du_m^{(1)}(\tau)}{d\tau}\cdot\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\right)-$$

$$-B_0^*(\tau)\left(\Delta(\tau)\frac{du_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}+u_m^{(1)}(\tau)\right)\cdot\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\cdot\left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2}\frac{d\lambda_m^{(0)}}{d\tau}+\frac{\lambda_m^{(1)}(\tau)\Delta(\tau)}{1!}\right)-$$

$$-B_0^*(\tau)u_m^{(0)}(\tau)\frac{1}{2}\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\cdot\left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2}\frac{d\lambda_m^{(0)}(\tau)}{d\tau}+\Delta(\tau)\lambda_m^{(1)}(\tau)+\frac{\Delta^3(\tau)}{3}\frac{d^2\lambda_m^{(0)}(\tau)}{d\tau^2}\right)-$$

$$-B_0^*(\tau)u_m^{(0)}(\tau)\exp(\lambda_m^{(0)}(\tau)\Delta(\tau))\lambda_m^{(2)}(\tau). \quad (36)$$

Для розв'язаності системи (36) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\left(f_m^{(2)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)=0. \quad (37)$$

Тоді, підставивши в (37) значення вектора $f_m^{(2)}(\tau)$, одержимо

$$\lambda_m^{(2)}(\tau)=\frac{\left(\Phi_m^{(2)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)}{\exp\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\left(B_0^*(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)+\left(\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)}, \quad (38)$$

де $\Phi_m^{(2)}(\tau)$ – вектор, який залежить від функцій $u_m^{(0)}(\tau)$, $u_m^{(1)}(\tau)$, $\lambda_m^{(0)}(\tau)$, $\lambda_m^{(1)}(\tau)$ і не залежить від $\lambda_m^{(S)}(\tau)$, $u_m^{(S)}(\tau)$ при $s \geq 2$.

Визначивши функцію $\lambda_m^{(2)}(\tau)$, знаходимо із (35) невідомий вектор $u_m^{(2)}(\tau)$:

$$u_m^{(2)}(\tau)=\Omega_m^+(\tau)f_m^{(2)}(\tau). \quad (39)$$

Аналогічно знаходимо $\lambda_m^{(S)}(\tau)$ і $u_m^{(S)}(\tau)$, прирівнявши в тотожності (23) коефіцієнт при ε. Маємо

$$\lambda_m^{(s)}(\tau)=\frac{\left(\Phi_m^{(s)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)}{\exp\left(\Delta(\tau)\lambda_m^{(0)}(\tau)\right)\cdot\left(B_0^*(\tau)\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)+\left(\varphi_m^{(1)}(\tau),\psi_m(\tau)\right)}, \quad (40)$$

$$u_m^{(s)}(\tau)=\Omega_m^+(\tau)f_m^{(s)}(\tau) \quad (41)$$

$(s = 1,2,3,\ldots..)$,
$(m = 1,2,\ldots\ldots)$.

4. Визначення оптимальної траєкторії

Для визначення оптимальної траєкторії розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt}=A(\tau,\varepsilon)x(t,\varepsilon)+B(\tau,\varepsilon)x(t-\Delta(\tau),\varepsilon)+$$

$$+D(\tau,\varepsilon)\sum_{m=1}^{\infty}u_m(\tau,\varepsilon)\exp\int_0^t\lambda_m(\tau,\varepsilon)dt, \quad (42)$$

$$D(\tau,\varepsilon)=2C(\tau,\varepsilon)\left(W^*(\tau,\varepsilon)+W(\tau,\varepsilon)\right)^{-1}C^*(\tau,\varepsilon).$$

Побудова розв'язків системи диференціальних рівнянь із запізненням залежить від поведінки коренів характеристичного рівняння

$$\det\left(A_0(\tau)+B_0(\tau)\exp(-\lambda\Delta(\tau))-\lambda E\right)=0. \quad (43)$$

Формальний розв'язок системи із запізнювальним аргументом знаходимо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=U(\tau,\varepsilon)\xi(t,\varepsilon), \quad (44)$$

де $U(\tau,\varepsilon)$, – n-мірний вектор, $\xi(t,\varepsilon)$ – скалярна функція, яка задовольняє рівнянню

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu(\tau,\varepsilon)\xi(t,\varepsilon) + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\tau,\varepsilon)\exp\int_0^t \lambda_m(\tau,\varepsilon)dt, \tag{45}$$

$$\mu(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \mu^{(s)}(\tau),$$

$$Z_m(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s Z_m^{(s)}(\tau). \tag{46}$$

Література

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
3. Менько Я.П., Сыроватка А.А. Об асимптотическом представлении решения задачи оптимального управления с запаздывающим аргументом // Сборник Киевского педагогического института имени А.М. Горького «Приближенные методы математического анализа». – К., 1976.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
5. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Сотниченко Н.А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.: Наукова думка, 1981.
6. Шкиль Н.И., Старун И.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища школа, 1989.
7. Шкіль М.І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища школа, 1971.
8. Шкіль М.І., Лейфура В.М. Про асимптотичний розв'язок задачі оптимального керування для систем з повільно змінними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР, фізико-математичні та технічні науки, 7, 1976.
9. Черноусько Ф.Л. Асимптотические методы в некоторых задачах оптимального управления. – К.: Вища школа, 1979.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.2004 р.