УДК 519.876.2

Трунов О.М., Миколаївський державний гуманітарний університет ім. Петра Могили

Застосування методу рекурентної апроксимації до задач підвищення точності та безвідмовності систем керування

У роботі розглянута нелінійна динамічна система. Досліджено властивості цієї системи за умови безперервності і диференційності за Фреше її моделей для випадку системи першого і другого порядку. Продемонстровано застосованість методу рекурентної апроксимації і до задачі прогнозування стану. Продемонстровано спорідненість задач забезпечення адекватного опису системи моделлю і мінімізації функції відхилення. Встановлено властивості цієї функції в умовах адекватного опису. Доведено теореми, що встановлюють зв’язок між родом адекватного опису і властивостями вектор-функції відхилення для Т-моделей першого і другого порядку.

The paper is dedicated to the analysis of non-liner dynamic systems. General properties of first and second odder systems are considered. The usage of the method of recurrent approximation is researched. The analytical approach to solving of prediction of state tasks and adequate description tasks of non-linear optimization is demonstrated. The theorem determinate properties T-models of first and second odder are proved.

У більшості задач забезпечення ефективного функціонування мобільних роботів та динамічних систем з адаптивними системами керування виникає необхідність у контролі та керуванні станом системи на етапі експлуатації з метою забезпечення певних наперед заданих якісних показників. Останнє актуальне, оскільки відхилення параметрів стану системи призводить до зміни точності виконання керуючих команд, зниження якості функціонування, появи випадкових та поступових відмов, що навіть може призвести до певної втрати працездатності.

Як показано у роботах по керуванню станом динамічних систем [1-5], задача управління пов’язана зі спорідненими задачами оцінки та прогнозування стану. Успіх їх розв’язання зумовлений ефективністю існуючих методів аналізу нелінійних систем. Одним з методів, що досліджується останнім часом, є метод рекурентної апроксимації, розроблений автором [6]. Теоретичний аналіз збіжності методу та можливостей його застосування до розв’язання нелінійних диференційних рівнянь та систем наведений у роботах [6-8]. Результати цих досліджень стимулюють пошук нових підходів і можливостей, що виникають завдяки впровадженню методу рекурентної апроксимації до задач оцінки та прогнозування стану нелінійних систем керування.

Розглянемо можливості застосування методу рекурентної апроксимації [6] до задач оцінки та прогнозування стану нелінійних систем керування.

1. Узагальнена модель керування

Розглянемо систему керування, яка може бути описана системою нелінійних стохастичних диференційних рівнянь, приведених до нормальної форми Коші:

$$\dot{\overline{Z}} = F(t,\overline{Z},\overline{K},\overline{X},\overline{A});$$

$$\overline{Y} = C\overline{Z};$$

$$t = t_0;\overline{Z}(t_0) = \overline{Z}_0;t \in [t_0,t_\varepsilon], \qquad (1.1)$$

$$(1.2)$$

$$\overline{Z}^T = \|Z_1,...,Z_n\|;\overline{Y}^T = \|Y_1,...,Y_p\|; \qquad (1.3)$$

де $\overline{K}^T = \|k_1,...,k_m\|;\overline{X}^T = \|x_1,...,x_\psi\|;$

$$\overline{A}^T = \|\alpha_1,...,\alpha_\omega\|;\overline{F}^T = \|f_1,...,f_n\|;$$

$$\overline{Z}_0^T = \|Z_{10},..., Z_{n0}\|; \overline{Y} \neq \overline{Z};$$

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11},..., & c_{1n} \\ c_{p1},..., & c_{pn} \end{Vmatrix} = \|c_{ik}\|, (i = 1,..., p; k = 1,..., n).$$

В системах (1.1)-(1.3) t – час; $\overline{Z}$ – вектор станів системи розмірності n; $\overline{K}$ – вектор параметрів системи розмірності m; $\overline{X}$ – вектор вхідних (керуючих) впливів розмірності l; $\overline{A}$ – вектор випадкових збурень розмірності ω; F – вектор нелінійних функцій розмірності n; t_0, t_e – початковий та кінцевий моменти часу, які визначають інтервал спостереження $[t_0, t_e]$; C – стала матриця спостереження розмірності $p \times n$; $\overline{Y}$ – вектор змінних, які вимірюють (вектор виходу) розмірності $p \leq n$; $\overline{Z}_0$ – вектор початкових умов.

У подальшому будемо вважати, що всі системи, які досліджуються, є системами керування, що задовольняють вимозі керованості та спостережності. Крім цього, будемо вважати, що розмірність вектора станів системи $\overline{Z}$ буде збігатися з розмірністю вектора виходу $\overline{Y}$, тобто $p = n$. В цьому разі матриця $C = \|c_{ik}\|$ спостережень буде одиничною ($i = 1,\ldots,n$; $k = 1,\ldots,n$) та рівняння (1-2) системи (1.1)-(1.3) прийме вигляд $\overline{Y} = \overline{Z}$, тобто $Y_i = Z_k, (i = 1,..., n; k = 1,..., n; i = k)$.

Тоді системи (1.1)-(1.3) можна буде записати так:

$$\frac{dY_i}{dt} = f_i, (t, Y_1,..., Y_n; k_1,..., k_m, \alpha_1,..., \alpha_\omega, x_1,..., x_\psi),$$

$$t = t_0; Y_i(t_0) = Y_{i0}; t \in [t_0, t_\varepsilon], \qquad (1.4)$$

де t_0, $Y_{10},...,Y_{n0}$ – початкові умови.

Будемо припускати, що для системи з рівнянь типу (1.4) виконані умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші в області визначення функції $f_1,\ldots,f_n$ при заданих початкових умовах $t_0, Y_{10},\ldots,Y_{n0}$ та припустимих значеннях параметрів системи $k_1,\ldots,k_m$. Припустимо також, що система (1.4) має властивість тривалості рішень при $t \to \infty$. Крім того, припустимо, що праві частини системи (1.4) мають властивість диференційованості за вихідними змінними $Y_1,\ldots,Y_n$, за параметрами системи $k_1,\ldots,k_m$ та за випадковими величинами $\alpha_1,\ldots,\alpha_\omega$, тобто праві частини системи (1.4) $f_1,\ldots,f_n$ мають неперервні частинні похідні за параметрами $k_1,\ldots,k_m$ та за випадковими величинами $\alpha_1,\ldots,\alpha_\omega$, а також за вихідними координатами системи $Y_1,\ldots,Y_n$.

2. Постановка задачі прогнозування

Ефективність прогнозування стану технічних об'єктів, у тому числі й систем керування, є узагальненим критерієм якості прогнозування і характеризується такими показниками, як точність прогнозування, тривалість інтервалу прогнозування та ефективність попередження поступових відмов.

Встановлено, що відомим методам прогнозування властиві такі основні недоліки, як невисока точність прогнозування та відносно низька ефективність попередження відмов систем керування. Через це значною мірою обмежується область застосування відомих методів прогнозування станів та поступових відмов.

Зазначені недоліки в основному обумовлені тим, що прогнозована вихідна величина системи подається у вигляді одновимірної функції, тобто у вигляді функції одного аргументу, в якості якого здебільшого виступає час. Тому основним засобом підвищення ефективності прогнозування стану систем керування є застосування таких методів прогнозування, в алгоритмах яких прогнозована вихідна величина подається у вигляді багатовимірної функції, тобто функції багатьох змінних часу та параметрів досліджуваної системи керування чи функції параметрів системи. Успіхи, досягнуті останнім часом у теорії наближення функції багатьох змінних [3-5], дозволяють ефективно будувати багатовимірні функції в аналітичному вигляді. Останнє разом з успіхами розбудови методів теорії ідентифікації технічних об'єктів обумовлює розвиток сучасних методів параметричного багатовимірного прогнозування.

Як правило, в основі методів параметричного прогнозування лежать методи багатовимірної апроксимації нелінійних функцій, головна задача яких – подання кожної з вихідних координат системи у вигляді наближеної аналітичної залежності від часу t та параметрів системи, тобто у вигляді

$$Y_i = Y_i(t, k_1, \ldots, k_m), \; (i = 1, \ldots, n). \quad (2.1)$$

Ефективні при визначенні наближеної аналітичної залежності (2.1) різні методи інтерполювання та наближення функції розроблені, в основному, для функції однієї змінної – часу t. В той же час методи інтерполювання та наближення функції багатьох змінних розроблені у самому загальному вигляді і тому мало підходять до інженерних застосувань чи взагалі можуть бути застосовані тільки для невеликої кількості змінних. При цьому припускається, що незалежні змінні (параметри $k_1,\ldots,k_m$) можуть бути виміряні в результаті проведення експерименту.

Оскільки параметри системи $k_1,\ldots,k_m$, які є аргументами функції $Y_i(i = 1,\ldots,n)$, що апроксимується, змінюються в часі за невідомими законами, то в загальному випадку вони не можуть бути виміряні в процесі експлуатації системи керування, але для визначення поточних значень параметрів $k_1(t),\ldots,k_m(t)$ необхідно використовувати методи теорії ідентифікації систем керування.

Як і для одновимірного прогнозування, для багатовимірного параметричного прогнозування стану систем можуть бути використані різні емпіричні методи з застосуванням багатовимірних інтерполяційних поліномів, а також формули квадратичної апроксимації нелінійних функцій, які записані для багатовимірного випадку.

При практичній реалізації методів параметричного прогнозування станів систем керування забезпечується такий додатковий техніко-економічний ефект:

- прогнозування не тільки вихідних координат системи, але й параметрів $k_1,\ldots,k_m$, поточні (фактичні) значення яких обчислюються в результаті розв'язання задач ідентифікації;
- використання результатів прогнозування для керування станом системи шляхом зміни її параметрів чи формування додаткового керуючого впливу на систему з метою підвищення безвідмовності і точності та забезпечення заданої якості функціонування системи;
- підвищення тривалості інтервалу прогнозування за часом;
- підвищення ефективності попередження поступових відмов системи;
- підвищення точності прогнозування стану систем керування.

Зазначені переваги дозволяють використовувати методи параметричного прогнозування в задачах керування станом систем керування з метою підвищення їх безвідмовності та точності.

Однак, незважаючи на всі наведені вище переваги, подальший розвиток цих методів стримується покладеним у їх основу принципом визначення адекватності моделі. Якісний аналіз адекватності вивчається теорією пізнання, в якій встановлюється необхідність не тільки кількісного прямого відображення явища моделлю, а й обов'язкова необхідність якісного відтворення усіх взаємопов'язаних факторів у більш широких межах, ніж межі простого кількісного збігу. Відомі методи аналітичного чи сплайнового відтворення функцій багатьох змінних можливо визначити прямими, оскільки вони відтворюють точну поведінку самої функції. В роботах [6-9] показано, що відтворення поведінки похідних від функцій може утворити новий підхід до забезпечення адекватності моделі та дати новий клас непрямих методів апроксимації. Проаналізуємо застосування цього підходу та методу рекурентної апроксимації до задачі оцінки прогнозування на базі системи (1.4).

Припустимо, що бажаний перехідний та усталений процес описується відомою функцією $\bar{Y}_б = f(t, \bar{K})$, де $\bar{Y}_б$ – n-компонентний вектор є функцією часу та вектора параметрів стану $\bar{K}$ розмірності m.

Припустимо, що є рішенням системи (1.4) при умові .

Реальний процес є рішенням системи (1.4), його представимо, застосовуючи вектор-функцію відхилення .

Введемо визначення.

Визначення 1. Функція $Y(x)$ визначена у просторі D, що однозначно визначає елемент Y з деякого лінійного простору D^*, описує множину $Y_б(x)$, яка також визначена на D і також однозначно визначає елемент $Y_б$ в лінійному просторі D^*, відповідно до критерію адекватності $L(Y,Y_б)$ n-го роду, якщо $L[(Y - Y_d)^n] = 0$ всюди на D.

Визначення 2. Функція $Y(x)$ визначена у просторі D, що однозначно визначає елемент Y з деякого лінійного простору D^*, описує множину $Y_б(x)$, яка також визначена на D і яка також однозначно визначає елемент $Y_б$ в лінійному просторі D^*, є функцією, яка лінійно відхиляється від множини $Y_б(x)$ відповідно до критерію адекватності $L(Y,Y_б)$ n-го роду, якщо $L[(Y - Y_d)^n] = \alpha * X$, (де α = const) всюди на D.

Визначення 3. Функція $Y(x)$ визначена у просторі D, що однозначно визначає елемент Y з деякого лінійного простору D^*, описує множину $Y_б(x)$, яка також визначена на D і яка також однозначно визначає елемент $Y_б$ в лінійному просторі D^*, є функцією, що квадратично відхиляється від множини $Y_б(x)$ відповідно до критерію адекватності $L(Y,Y_б)$ n-го роду, якщо $L[(Y - Y_d)^n] = \beta * X^2$, (де β = const) всюди на D.

Визначення 4. Математична модель $\overline{K_0}$ зображена рівнянням, розв'язаним $\overline{Y_б} = f(t, \overline{K_0}, \overline{X}, \overline{A})$ відносно старшої похідної першого порядку від вектора вихідної величини, права частина якої подана вектор-функцією, компоненти якої описані рівнянням типу (1.4), причому ця вектор-функція всюди в області визначення D має хоча б одну похідну Фреше, а також для початкового стану системи за умов = const існує розв'язок цього рівняння є , є T-моделлю першого порядку.

Визначення 5. Математична модель $\overline{K_0}$ зображена рівнянням, розв'язаним відносно старшої похідної $\overline{\ddot{Y}_б} = f(t, \overline{K_0}, \overline{X}, \overline{A})$ другого порядку від вектора вихідної величини, права частина якої подана вектор-функцією, компоненти якої описані $\overline{Y} = \overline{Y_б} + \overline{\Psi}$ рівнянням типу (1.4), причому ця вектор-функція всюди в області визначення D має хоча б одну похідну Фреше, а також для початкового стану системи за умов = const існує розв'язок цього рівняння , є T-моделлю другого порядку.

Таким чином $\dot{\overline{\Psi}}$ $\min\limits_{K} \dot{\overline{\Psi}}$ (2.2)

Таке подання, разом з вимогою забезпечити збіжність похідних, $(\dot{\overline{\Psi}})^2 \le \mathrm{E}$, дозволяє поставити задачу параметричного прогнозування $t - t_0 \le t_д$ як задачу дослідження операцій з обмеженнями.

Мінімізувати , тобто (2.3)

при обмеженнях $L(t, \overline{K}, \overline{\Lambda}) = \dot{\overline{\Psi}}(t, \overline{K}) + \lambda_1(\dot{\overline{\Psi}}^2 - \mathrm{E})$. (2.4)

Побудуємо функцію Лагранжа, використовуючи тільки одне з обмежень,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(t, \overline{K}, \overline{\Lambda})}{\partial \overline{K}} = \dfrac{\partial \dot{\overline{\Psi}}}{\partial \overline{K}}(1 + 2\lambda_1 \dot{\overline{\Psi}}) = 0; \\ \dfrac{\partial L(t, \overline{K}, \overline{\Lambda})}{\partial \lambda_1} = \dot{\overline{\Psi}}^2 - \mathrm{E} = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

(2.6)

Утворимо систему

$$\frac{\partial \dot{\overline{\Psi}}}{\partial \overline{K}} = 0 \quad \overline{K} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \dot{\overline{\Psi}}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \overline{K}} = 0,$$

3. Визначення інтервалу прогнозування

У результаті розв'язання системи (2.7) отримаємо $\dfrac{\partial \dot{\overline{\Psi}}}{\partial t} = \ddot{\overline{\Psi}} = 0.$, але оскільки вектор $\overline{Y_б}$ не є сталою величиною, а також не є функцією часу, що стрибкоподібно змінюється, то $\overline{\Psi}\big|_{t=t_0} = 0$

$\overline{\Psi}$

тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\Psi} = \sqrt{E}\,(t - t_0);\ \dot{\overline{\Psi}} = \sqrt{E}. \qquad (3.1)$$

Звідси, враховуючи (2.2) та визначення для , отримаємо початкові умови для , а після подвійного інтегрування (3.1) визначимо граничне значення для , використовуючи активне обмеження (2.4) та властивості сідлової точки функції Лагранжа:

$$\lambda_1 = 1/(2\sqrt{E})$$

Звідси розв'язання системи (2.7) дає значення множників Лагранжа

$$\overline{K} = f(t)$$

Другий розв'язок отримаємо, якщо прирівняємо до нуля другий множник першого рівняння системи (2.7). Нескладно переконатися, що цей розв'язок абсолютно ідентичний. Останнє підтверджує інваріантність граничного відхилення перехідного процесу. Враховуючи, що відхилення від бажаного процесу виникає як наслідок зміни властивостей системи, тобто якщо , то з рівняння (1.4) після розкладання його у ряд Тейлора в околі точки t отримаємо, що середньоквадратичне відхилення може бути оцінено

$$E = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^k f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})}{k!\,\partial t^k}\Big|_{t=t_0}\Delta t^k\Big)^2 \qquad (3.2)$$

$$\overline{Y}(\overline{t},\overline{K},\overline{U}) = \overline{Y}_\delta(\overline{t},\overline{K},\overline{U}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}\frac{\partial^k f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0}\Delta t^{k+1}. \qquad (3.3)$$

Таким чином, прогнозування стану з середньоквадратичною збіжністю похідних визначається як

$$\dot{\overline{\Psi}}$$

$$\Delta W^{(k)} = \sum_{j=1}^{5}\frac{\Delta X_{jm}}{K!} * \frac{\partial}{\partial X_j}\sum_{j=1}^{5}\Delta X_{jm} * \frac{\partial}{\partial X_j}\,.....\,\sum_{j=1}^{5}\Delta X_{jm} * \frac{\partial}{\partial X_j}\sum_{j=1}^{5}\Delta X_{jm} * \frac{\partial}{\partial X_j}\sum_{j=1}^{5}\Delta X_{jn} * \frac{\partial W}{\partial X_j}$$

Аналіз розв'язання задачі мінімізації швидкості ухилення від бажаного усталеного процесу показує, що повний приріст правої частини моделі (1.4) $f(t,Y,K,X,A)$ визначає інваріант цієї задачі.

Для подальшого викладу введемо приріст k-го порядку

$$W = f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A}) - f(t,\overline{Y_б},\overline{K_O},\overline{X},\overline{A}).$$

В останньому співвідношенні використані формальні позначення X_j аргументів функції , де j пробігає значення від одиниці до п'яти у відповідному порядку розташування аргументів, кількість операцій диференціювання дорівнює K, також покладено, що ΔX_j не залежить від X_j, крім цього, введено позначення

$$W = W^{0}(S_0) + \sum_{k=1}^{N}\Delta W^{(k)}(S_0) + \Delta W^{N+1}(S_0),$$

$\overline{Y_б}$ $\overline{K_O}$ $\Delta W^{(N+1)}(S)$

Також слід зауважити, що m приймає значення n, або $n - 1$, коли значення величин j більше ніж у двох індексів приростів аргументу співпадає. Таким чином, відповідно до методу рекурентної апроксимації функцію багатьох аргументів можна подати наступним чином:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N}\Delta W^{(k)}(S_0).$$

$$\dot{\overline{\Psi}}$$

де S_0 – значення вектора стану, що визначається фіксованими векторами та , а N – кількість членів ряду у розкладі, – залишковий член. Останнє дозволяє зобразити , враховуючи, що її значення для початкового вектора стану дорівнює нулю, у вигляді

$$\dot{\Psi}_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial^k W(S)}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta t_n^{k-1}}{k!}\Delta t_n + \ldots \\ + \frac{\partial^k W(S)}{\partial \overline{K}^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta \overline{K}_{n-1}^{k-1}}{k!}\Delta \overline{K}_n + \ldots \\ . \\ \frac{\partial^k W(S)}{\partial \overline{X}^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta X_{n-1}^{k-1}}{k!}\Delta X_n + \ldots \\ \frac{\partial^k W(S)}{\partial \overline{\Psi}}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta \Psi_{n-1}^{k-1}}{k!}\Delta\Psi_n + \ldots \\ + \frac{\partial^k W(S)}{\partial \overline{A}^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta \overline{A}^{k-1}}{k!}\cdot\Delta\overline{A}\ \ldots\end{array}\right]$$

Використовуючи результати зображення у вигляді ряду відповідно до методу рекурентної апроксимації, а також властивість її інваріантності та нехтуючи змішаними похідними, отримаємо

Позначивши доданки під знаком суми без першого доданка ΔW_{yxk} та задаючи загальне значення для ε – відносної величини відхилення, враховуючи інваріантність Ψ, отримаємо величину інтервалу прогнозування з підвищеною точністю у n-му наближенні:

$$\Delta t_n = \left[\varepsilon * f(t_0, \overline{K}_0, \overline{X}_0, \overline{A}_0) - \Delta W_{\psi xk}\right] *$$

$$* \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial t^k}\bigg|_{t=t_0} \Delta t_{n-1}^{k-1} \right]^{-1}. \qquad (3.4)$$

На підставі розглянутих процесів, як висновок, можна сформулювати наступну теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Т*-модель першого порядку, що адекватно описує нелінійну динамічну систему в інтервалі прогнозування з критерієм адекватності – мінімум відхилення похідних першого порядку від вектора вихідної величини моделі та системи, за умови, що квадрат похідної цього відхилення не перевищує визначеного значення *Е*, за умови існування розв'язку для класу векторів стану є адекватною другого роду з критерієм абсолютного відхилення та функцією, яка лінійно відхиляється за часом з тим же критерієм нульового роду.

Доведення

Припустимо, що за умов визначень 1 та 3 і *Т*-моделей першого порядку та теореми функція відхилення не є лінійною, тоді її похідна за часом не є сталою, а значить, друга похідна не дорівнює нулю, а отже, $\overline{\Psi}$ не є розв'язком задачі (3.1). Звідки випливає, що у випадку протилежному за твердження теореми 1 не виконуються її умови. І навпаки, коли виконуються її умови, то згідно з теоремою Куна – Таккера рішення (3.1) забезпечує умови теореми 1.

Наслідок 1

Якщо *Т*-модель першого порядку в інтервалі часу має незмінну швидкість функції відхилення, то вона ідентифікована як адекватна другого роду.

4. Постановка задачі прогнозування для системи другого порядку

Тепер розглянемо систему керування, яка може бути описана системою нелінійних стохастичних диференційних рівнянь другого порядку, приведених до нормальної форми Коші:

$$\ddot{\overline{Z}} = F(t, \overline{Z}, \overline{K}, \overline{X}, \overline{A}); \qquad (4.1)$$

$$\overline{Y} = C\overline{Z}; \qquad (4.2)$$

$$t = t_0; \overline{Z}(t_0) = \overline{Z}_0; t \in [t_0, t_\varepsilon], \qquad (4.3)$$

де

$$\overline{Z}^T = \|Z_1,\ldots,Z_n\|; \overline{Y}^T = \|Y_1,\ldots,Y_p\|;$$

$$\overline{K}^T = \|k_1,\ldots,k_m\|; \overline{X}^T = \|x_1,\ldots,x_\psi\|;$$

$$\overline{A}^T = \|\alpha_1,\ldots,\alpha_\omega\|; \overline{F}^T = \|f_1,\ldots,f_n\|;$$

$$\overline{Z}_0^T = \|Z_{10},\ldots,Z_{n0}\|; \overline{Y} \neq \overline{Z};$$

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11},\ldots, & c_{1n} \\ c_{p1},\ldots, & c_{pn} \end{Vmatrix} = \|c_{ik}\|, (i = 1,\ldots,p; k = 1,\ldots,n).$$

В системах (4.1)-(4.3) позначено, як і раніше, t – час; $\overline{Z}$ – вектор станів системи розмірності n; $\overline{K}$ – вектор параметрів системи розмірності m; $\overline{X}$ – вектор вхідних (керуючих) впливів розмірності ψ; $\overline{A}$ – вектор випадкових збурень розмірності ω; F – вектор нелінійних функцій розмірності n; t_0, t_ε – початковий та кінцевий моменти часу, які визначають інтервал спостереження $[t_0, t_\varepsilon]$; C – стала матриця спостереження розмірності $p \times n$; $\overline{Y}$ – вектор змінних, які вимірюють (вектор виходу) розмірності $p \leq n$; $\overline{Z}_0$ – вектор початкових умов.

Надалі будемо вважати, що всі системи, що досліджуються, є системами керування, які задовольняють вимозі керованості та спостережності. Крім цього, вважатимемо, що розмірність вектора $C=\|c_{ij}\|$ станів системи $(i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,n)$ буде збігатися з розмірністю вектора виходу, тобто $Y=Z=n$. В цьому разі матриця спостережень буде одиничною $Y_i=\overline{Z}_k,\ (i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,n;\ i=k)$. Тоді система (4.1-4.3) прийме вигляд, тобто

$$\frac{d^2Y_i}{dt^2}=f_i(t,Y_1,\dots,Y_n;k_1,\dots,k_m,\ \alpha_1,\dots,\alpha_\omega,x_1,\dots,x_\psi), \tag{4.4}$$

Тоді системи (4.1-4.3) можна буде записати так:

$$t=t_0;\ Y_i(t_0)=Y_{i0};\ t\in[t_0,t_\varepsilon],$$

де $t_0, Y_{10},\dots, Y_{n0}$ – початкові умови.

Будемо припускати, що для системи (4.1-4.3) виконані умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші в області визначення функції $f_1,\dots,f_n$ при заданих початкових умовах t_0, $Y_{10},\dots,Y_{n0}$ та припустимих значеннях параметрів системи $k_1,\dots,k_m$. Припустимо також, що система (4.4) має властивість тривалості рішень при $t\to\infty$. Крім того, припустимо, що праві частини системи (4.4) мають властивість диференційованості за вихідними змінними $Y_1,\dots,Y_n$, за параметрами системи $k_1,\dots,k_m$ та за випадковими величинами $\alpha_1,\dots,\alpha_\omega$, тобто праві частини системи (4.4) $f_1,\dots,f_n$ мають неперервні частинні похідні за параметрами $k_1,\dots,k_m$ та за випадковими величинами $\alpha_1,\dots,\alpha_\omega$, а також за вихідними координатами системи $Y_1,\dots,Y_n$.

Введемо функцію відхилення за аналогією (2.2) та сформулюємо задачу її мінімізації з обмеженнями.

Мінімізувати

$$\min_{\overline{K}}\ddot{\overline{\Psi}}, \tag{4.5}$$

при обмеженнях

$$(\ddot{\overline{\Psi}})^2\le \mathrm{E}, \tag{4.6}$$

$$t-t_0\le t_{\mathrm{E}}. \tag{4.7}$$

Побудуємо функцію Лагранжа, використовуючи тільки одне з обмежень, тобто

$$L(t,\overline{K},\overline{\Lambda})=\ddot{\overline{\Psi}}(t,\overline{K})+\lambda_1(\ddot{\overline{\Psi}}^2-\mathrm{E}). \tag{4.8}$$

Утворимо систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(t,\overline{K},\overline{\Lambda})}{\partial\overline{K}}=\dfrac{\partial\ddot{\overline{\Psi}}}{\partial\overline{K}}(1+2\lambda_1\ddot{\overline{\Psi}})=0;\\[2mm] \dfrac{\partial L(t,\overline{K},\overline{\Lambda})}{\partial\overline{\Lambda}}=\ddot{\overline{\Psi}}^2-E=0.\end{cases} \tag{4.9}$$

У результаті розв'язання системи (4.9) отримаємо

$$\frac{\partial\ddot{\overline{\Psi}}}{\partial\overline{K}}=0,$$

$$\frac{\partial\ddot{\overline{\Psi}}}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\overline{K}}=0,$$

але оскільки вектор $\overline{\mathrm{K}}$ не є сталою величиною, а також не є функцією часу, що стрибкоподібно змінюється, то

$$\frac{\partial\ddot{\overline{\Psi}}}{\partial t}=0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\ddot{\overline{\Psi}}=0. \tag{4.10}$$

Звідси, враховуючи (2.2) та визначення для $\overline{Y}_б$, запишемо початкові умови для $\overline{\Psi}\big|_{t=t0}=0$, а після подвійного інтегрування (3.1) визначимо граничне значення для $\overline{\Psi}$, використовуючи активне обмеження (4.6) та властивості сідлової точки функції Лагранжа:

$$\dot{\overline{\Psi}}=\sqrt{E}(t-t_0);\ \ddot{\overline{\Psi}}=\sqrt{E};$$

$$\overline{\Psi}=\frac{\sqrt{E}(t-t_0)^2}{2}; \tag{4.11}$$

Звідси розв'язання системи (2.7) дає значення множників Лагранжа

$$\lambda_1=-1/(2\sqrt{E}).$$

Другий розв'язок отримаємо, якщо прирівняємо до нуля другий множник першого рівняння системи (4.9). Нескладно переконатися, що цей розв'язок абсолютно ідентичний. Останнє підтверджує інваріантність граничного відхилення перехідного процесу. Враховуючи, що відхилення від бажаного процесу виникає як наслідок зміни властивостей системи, тобто якщо $\overline{K}=f(t)$, то з рівняння (4.4) після розкладання його у ряд Тейлора в околі точки $t=t_0$ отримаємо, що середньоквадратичне відхилення може бути визначено

$$E=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^k f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})}{k!\,\partial t^k}\Big|_{t=t_0}\Delta t^k\Big)^2 . \quad (4.12)$$

Аналіз розв'язків задачі мінімізації прискорення ухилення від бажаного усталеного процесу з незмінними властивостями системи показує, що повний приріст правої частини моделі (4.4) або його старшої похідної визначає інваріант цієї задачі. Останнє може бути розцінено таким чином: задача моделювання динамічних нелінійних систем з визначеним критерієм $\ddot{\overline{\Psi}}$ адекватності $L(Y,Y_б)$ n-го роду в межах визначеного проміжку прогнозування є еквівалентною до задачі мінімізації старшої

$$\ddot{\overline{\Psi}}_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\begin{aligned}
&.\Big(\frac{\partial^k(f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})-f(t,\overline{Y_б},\overline{K_O},\overline{X},\overline{A}))}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta t_{n-1}^{k-1}}{k!}\Delta t_n+\ldots\\
&+\frac{\partial^k(f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})-f(t,\overline{Y_б},\overline{K_O},\overline{X},\overline{A}))}{\partial\overline{X}^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta\overline{X}_{n-1}^{k-1}}{k!}\cdot\Delta\overline{X}_n+\ldots\\
&+\frac{\partial^k(f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})-f(t,\overline{Y_б},\overline{K_O},\overline{X},\overline{A}))}{\partial\overline{K}^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta\overline{K}_{n-1}^{k-1}}{k!}\cdot\Delta\overline{K}_n+\ldots\\
&+\frac{\partial^k(f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})-f(t,\overline{Y_б},\overline{K_O},\overline{X},\overline{A}))}{\partial\overline{\Psi}}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta\overline{\Psi}_{n-1}^{k-1}}{k!}\cdot\Delta\overline{\Psi}_n+\ldots\\
&+\frac{\partial^k(f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})-f(t,\overline{Y_б},\overline{K_O},\overline{X},\overline{A}))}{\partial\overline{A}^k}\Big|_{t=t_0}\frac{\Delta\overline{A}^{k-1}}{k!}\cdot\Delta\overline{A}\ \Big).
\end{aligned}\right].$$

Позначивши доданки під знаком суми без першого доданка ΔW_{yxk} та використовуючи для відносної величини відхилення перехідного процесу, наприклад, загальновживане п'ятивідсоткове значення ε, враховуючи інваріантність $\ddot{\overline{\Psi}}$, отримаємо величину інтервалу прогнозування з підвищеною точністю у n-му наближенні:

$$\Delta t_n=\left[\varepsilon\cdot f(t_0,\overline{K}_0,\overline{X}_0,\overline{A}_0)-\Delta W_{\psi xk}\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0}\Delta t_{n-1}^{k-1}\right]^{-1}.$$

Таким чином, прогнозування стану системи із сильною збіжністю похідних третього порядку, а також із середньоквадратичною збіжністю похідних другого порядку визначається як

$$\overline{Y}(t,\overline{K},\overline{X},\overline{A})=\overline{Y}_б(t,\overline{K},\overline{X},\overline{A})+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)!}\frac{\partial^k f(t,\overline{Y},\overline{K},\overline{X},\overline{A})}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0}\Delta t^{k+2}, \quad (4.13)$$

а спорідненість задач мінімізації ухилення та адекватного моделювання нелінійних динамічних систем відкриває шляхи ідентифікації без вимірювання похідних вихідних векторів і стану, крім цього, створює методичні засади побудови алгоритмів адаптивного керування станом таких систем.

На підставі розглянутих процесів, як висновок з усіх наведених міркувань, можна сформулювати без доведення наступну теорему.

ТЕОРЕМА 2. *T*-модель другого порядку, що адекватно описує нелінійну динамічну систему в інтервалі прогнозування з критерієм адекватності – мінімум відхилення похідних другого порядку від вектора вихідної величини моделі та системи, за умови, що квадрат другої похідної цього відхилення не перевищує визначеного значення *E*, за умови існування розв'язку для класу векторів стану є адекватною третього роду з критерієм абсолютного відхилення та функцією, яка лінійно відхиляється за часом, з критерієм адекватності першого роду та функцією, що квадратично відхиляється за часом, з критерієм адекватності нульового роду.

Доведення

Припустимо, що за умов визначень 1 та 3 і *T*-моделей другого порядку та теореми функція відхилення не є квадратичною, тоді її друга похідна за часом не є сталою, а значить, третя похідна не дорівнює нулю, а отже, не є розв'язком задачі (4.9). Звідки випливає, що у випадку протилежному за твердженням теореми 2 не виконується її умова. І навпаки, коли виконуються її умови, то згідно з теоремою Куна – Таккера рішення (4.9) забезпечує умови теореми 2.

Наслідок 2

Якщо *T*-модель другого порядку в інтервалі часу має незмінне прискорення функції відхилення, то вона ідентифікована як адекватна третього роду.

Висновки

1. Задача про мінімізацію поведінки відхилень похідних від функцій є спорідненою до задачі забезпечення адекватності *T*-моделі *n*-го порядку, яка утворює разом з методом рекурентної апроксимації новий клас непрямих методів

Література

1. Александровский Н.М., Егоров С.В., Кузин Р.Е. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами. – М.: Энергия, 1973. – 272 с.
2. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
3. Козеев А.А. Методы аппроксимации выходных координат нелинейных систем управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 194-199.
4. Чуев Ю.В., Михайлов Ю.Б., Кузьмин В.И. Прогнозирование количественных характеристик процессов. – М.: Сов. радио, 1975. – 398 с.
5. Козеев В.А. Повышение безотказности и точности нелинейных систем управления. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – С. 127.
6. Трунов А.Н. Моделирование глубоководных технических средств как системы с распределенными параметрами // Проектирование судов и судовых устройств: Сб. науч. тр. – Николаев: НКИ, 1989. – С. 127-136.
7. Trounov A.N. Subnursible mathematical model allowing for dynamic properties of controlling systems. Proc. Of International tecnology 90, Szezecin, Poland, 1990. – С. 493-507.
8. Трунов О.М. Застосування методу рекурентної апроксимації до розв'язку нелінійних задач // Зб. науков. праць МФ НаУКМА. – Миколаїв, 1999. – С. 135-142.
9. Trounov A.N. Mathematical aspects of image recognition. Proc. Of International tecnology 90, Szezecin, Poland, 1990. – С. 479-493.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2004 р.