УДК 519.3:62-50

Лейфура В.М., Миколаївський державний гуманітарний університет ім. Петра Могили

Асимптотичне інтегрування системи автоматичного керування при наявності точки повороту

В роботі розглядається інтегро-диференціальне рівняння другого порядку, яке описує у лінійному наближенні рух системи автоматичного керування при повільній зміні параметрів об'єкта та регулятора. При цьому будується розв'язок задачі при наявності точок повороту.

An algorithm for solution of one problem of automatic control is suggested for the of an interval containing turning points.

Загальна постановка проблеми та її зв'язок з науково-практичними задачами

Як відомо, структура розв'язків (зокрема асимптотичних) лінійних диференціальних рівнянь та їх систем, а також алгоритми побудови цих розв'язків суттєво залежать від поведінки коренів відповідного характеристичного рівняння [1-3]. Досить складним для досліджень є випадок, коли деякі корені характеристичного рівняння збігаються лише в окремих точках розглядуваного проміжку. При переході через ці точки характер розв'язку змінюється, наприклад, ліворуч розв'язок може мати коливний характер, а праворуч – експоненціальний. Тому такі точки називають перехідними, або інакше – точками повороту, оскільки в класичній механіці це є точки, в яких кінетична енергія рухомої частинки стає рівною її потенціальній енергії, і частинка змінює напрям руху.

Для побудови асимптотичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та їх систем з точками повороту використовуються деякі спеціальні функції, зокрема, функції Бесселя, Ейрі, циліндричні функції [4; 5]. Проте формули, які містять спеціальні функції, незручні у практичному використанні. Тому досить актуальною є проблема побудови асимптотичних розв'язків для рівнянь з точками повороту через елементарні функції.

Огляд публікацій та аналіз нерозв'язаних проблем

В наукових дослідженнях останніх років [6-8] розроблені два підходи до розв'язання проблеми точок повороту для систем вигляду:

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon),$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $h > 0$, $A(t,\varepsilon)$ – квадратична $(n \times n)$ матриця.

Одна із них полягає в заміні характеристичного рівняння:

$$\det\left(A_0(t) - \lambda E\right) = 0,$$

корені якого збігаються в окремих точках даного відрізка $t \in [0,T]$ рівнянням вигляду:

$$\det\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i A_i(t) - \lambda E\right) = 0,$$

корені якого різні при $t \in [0;T]$, що дозволяє для побудови асимптотичних розв'язків вихідної системи за деяких умов застосовувати методи, які діють при відсутності точок повороту.

Інший підхід ґрунтується на введенні дрібномасштабної змінної $t_1 = \frac{t}{\varepsilon}$, що дозволяє в малому околі точки повороту звести вихідну систему до системи із сталою головною матрицею. Цей підхід передбачає “склеювання” розв’язків, побудованих у малому околі точки повороту, з розв’язками, побудованими за його межами.

Запропоновані підходи можна застосовувати для побудови асимптотичних розв’язків скалярних диференціальних рівнянь другого порядку, які слугують математичними моделями багатьох практичних задач.

Мета дослідження

Зокрема в даній роботі розглядається інтегро-диференціальне рівняння другого порядку, яке описує у лінійному наближенні рух системи автоматичного керування при повільній зміні параметрів об’єкта та регулятора. При цьому будується розв’язок задачі при наявності нульової точки повороту на часовому відрізку, на відміну від [2; 3], де кратність коренів зберігається на всьому відрізку інтегрування.

1. Постановка задачі

Розглянемо рівняння:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x(t,\varepsilon)}{dt^2} + \varepsilon a(\tau,\varepsilon)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} + b(\tau,\varepsilon)x(t,\varepsilon) = \varepsilon h(\tau)\int_{-\infty}^{t} G(t-t',\tau')x(t',\varepsilon)dt', \qquad (1)$$

де t – час, $t \in [0;L]$; ε – малий параметр, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$; τ – повільний час, $\tau = \varepsilon t$. Права частина рівняння описує автоматичне керування, де $G(t - t',\tau')$ – імпульсна перехідна функція [2]. Коефіцієнти $a(\tau,\varepsilon)$ і $b(\tau,\varepsilon)$ допускають розвинення за степенями малого параметра ε:

$$a(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i a_i(\tau),$$

$$b(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i b_i(\tau).$$

Припускається, що відрізок $[0,L]$ містить нульову точку повороту.

Побудова асимптотичного у розумінні [1] розв’язку рівняння (1) виконується за наступною схемою.

Спочатку будується розв’язок рівняння (1) на відрізку, який не містить точку повороту. Потім розглядається допоміжне рівняння вигляду:

$$\frac{d^2 z(\xi,\mu)}{d\xi^2} + \widetilde{a}(\eta,\mu)\frac{dz(\xi,\mu)}{d\xi} + \widetilde{b}(\eta,\mu)z(\xi,\mu) = \mu\widetilde{h}(\eta,\mu)\int_{-\infty}^{\xi} G\big((\xi-\xi')\mu, \mu^2 t_0 + \mu\eta'\big)z(\xi',\mu)d\xi, \qquad (2)$$

$$\xi \in [\alpha,\beta], \quad \mu \in (0,\mu_0], \quad \eta = \xi\mu^2,$$

$$t_0 \in [\alpha\mu, \beta\mu], \quad \widetilde{a}(\eta,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu^i \widetilde{a}_i(\eta),$$

$$\widetilde{b}(\eta,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu^i \widetilde{b}_i(\eta), \quad \widetilde{h}(\eta,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu^i \widetilde{h}_i(\tau),$$

$$\widetilde{a}_i(\eta), \quad \widetilde{b}_i(\eta), \quad \widetilde{h}_i(\eta)$$

є необмежено диференційовними функціями на відрізку $[\alpha\mu^2, \beta\mu^2]$, G – імпульсивна перехідна функція регулятора.

Зауважимо, що рівняння (1) зводиться до рівняння (2) шляхом відповідної заміни з метою інтегрування рівняння (1) в околі точки повороту. І, нарешті, будується неперервний разом зі своєю похідною наближений розв’язок рівняння (1) на всьому відрізку $t \in [0;L]$.

2. Побудова асимптотичного розв’язку задачі на проміжку, який не містить точку повороту

Теорема 1. Нехай при всіх $t \in [\alpha,\beta]$ виконуються умови:

1. $a_0^2(\tau) - 4b_0(\tau) \neq 0$;
2. коефіцієнти $a_i(\tau)$, $b_i(\tau)$ є необмежено диференційованими на відрізку $[\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta]$.

Тоді рівняння (1) на відрізку $[\alpha,\beta]$ має два лінійно незалежні формальні розв’язки виду:

$$x_k(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{t}\varphi_k(\tau',\varepsilon)dt'\right),$$

$$\varphi_k(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_{ik}(\tau), \quad k = 1,2.$$

$$x(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{t}\varphi(\tau',\varepsilon)dt'\right),$$

$$\varphi(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\varphi_i(\tau) \qquad (3)$$

Доведення. Будемо шукати формальний розв'язок рівняння (1) на відрізку [α,β] у вигляді:

$$\varphi^2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^2\varphi'(\tau,\varepsilon)+a(\tau,\varepsilon)\varphi(\tau,\varepsilon)+b(\tau,\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon h(\tau)\int_0^{\infty}G(s,\tau-\varepsilon s)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t-s}\varphi(\tau'',\varepsilon)dt''\right)ds. \qquad (4)$$

Підставляючи в (4) розвинення для $a(\tau,\varepsilon)$, $b(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$, а також

$$G(s,\tau-\varepsilon s)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t-s}\varphi(\tau'',s)dt''\right)=$$
$$=\exp\left(\frac{s^2}{2}\varphi_0'(\tau)-s\varphi_1(\tau)\right)\left(G(s,\tau)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\left(M_i(s,G(s,\tau),\varphi_0(\tau),\ldots,\varphi_i(\tau))-\frac{G(s,\tau)}{(i-1)!}\varphi_{i+1}(\tau)\right)\right),$$

де M_i – многочлен від змінної s, функцій $\varphi_0(\tau)$, $\varphi_i(\tau)$, їх похідних (для $G(s,\tau)$ похідні $\frac{\partial G}{\partial\tau}$), та порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε, дістанемо зчислену систему рівнянь:

$$\varphi_0^2(\tau)+a_0(\tau)\varphi_0(\tau)+b_0(\tau)=0; \qquad (5)$$

$$2\varphi_1(\tau)\varphi_0(\tau)+a_1(\tau)\varphi_0(\tau)+a_0(\tau)\varphi_1(\tau)+b_1(\tau)=h(\tau)\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{s^2}{2}\varphi_0'(\tau)-s\varphi_1(\tau)\right)G(s,\tau)ds; \qquad (6)$$

$$\sum_{j=0}^{i}\varphi_{i-j}\varphi_j(\tau)+\varphi_{i-2}'(\tau)+\sum_{j=0}^{i}a_{i-j}\varphi_j(\tau)+b_i(\tau)=$$
$$=h(\tau)\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{s^2}{2}\varphi_0'(\tau)-s\varphi_1(\tau)\right)\left(M_{i-1}(s,G(s,\tau),\varphi_0(\tau),\ldots,\varphi_{i-1}(\tau))-\frac{sG(s,\tau)}{(i-2)!}\varphi_i(\tau)\right)ds; \qquad (7)$$

$$i=2,3,\ldots$$

Використовуючи [3], послідовно знаходимо:

$$\varphi_0(\tau)=\frac{1}{2}\left(-a_0(\tau)\pm\sqrt{a_0^2(\tau)-4b_0(\tau)}\right); \qquad (8)$$

$$\varphi_1(\tau)=-\frac{a_1(\tau)\varphi_{k0}+b_1(\tau)}{2\varphi_{k0}(\tau)+a_0(\tau)}+\frac{h(\tau)}{2\varphi_{k0}(\tau)+a_0(\tau)}\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{s^2}{2}\varphi_{k0}'(\tau)\right)G(s,\tau)\exp(-s\varphi_{k1}(\tau))ds; \qquad (9)$$

$$\varphi_{ki}(\tau)=\frac{h(\tau)\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{s^2}{2}\varphi_{k0}'-s\varphi_{k1}(\tau)\right)M_{i-1}(s,G(s,\tau),\varphi_{k0}(\tau),\ldots,\varphi_{ki-1}(\tau))ds}{Q}-$$
$$-\frac{R_i(a_1(\tau),\ldots,a_i(\tau),b_i(\tau),\varphi_{k0}(\tau),\ldots,\varphi_{ki-1}(\tau))}{Q}, \qquad (10)$$

де R_i – многочлен від $a_p(\tau)$, $p=\overline{1,i}$; $b_i(\tau)$, $\varphi_{kq}(\tau)$, $q=\overline{0,1,i}$, та похідної $\varphi_{ki-2}'(\tau)$, $k=1,2$, бо з огляду на умову (1) теореми 1 рівняння (8) має два розв'язки: $\varphi_{10}(\tau)$ і

$$Q=2\varphi_{k0}+a_0(\tau)+\frac{h(\tau)}{(i-2)!}\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{s^2}{2}\varphi_{k0}'-s\varphi_{k1}(\tau)\right)G(s,\tau)s\,ds,\ k=1,2.$$

Таким чином, при $t \in [\alpha,\beta]$ рівняння (1) має два формальних розв'язки: $x_1(t,\varepsilon)$ і $x_2(t,\varepsilon)$, які є лінійно незалежними. Теорему 1 доведено.

Поряд з рівнянням (1) будемо розглядати рівняння (2). Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. Якщо функції $\tilde{a}_i(\eta)$, $\tilde{b}_i(\eta)$, $\tilde{h}_i(\eta)$ є необмежено диференційованими функціями на відрізку $[\alpha\mu^2,\beta\mu^2]$ і

$$\tilde{a}_0^2(\tau)-4\tilde{b}_0(\tau)\neq 0, \tag{11}$$

то тоді на проміжку $[\alpha,\beta]$ рівняння (2) має два лінійно незалежні формальні розв'язки вигляду:

$$z_1(\xi,\mu)=\exp\left(\int_\alpha^\xi \lambda_1(\eta',\mu)\,d\xi'\right),$$

$$\lambda_1(\eta,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\lambda_{1i}(\eta), \tag{12}$$

$$z_2(\xi,\mu)=\exp\left(\int_\alpha^\xi \lambda_2(\eta',\mu)\,d\xi'\right)$$

$$\lambda_2(\eta,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i\lambda_{2i}(\eta), \tag{13}$$

де $\lambda_{1i}(\tau)$, $\lambda_{2i}(\tau)$ є необмежено диференційованими функціями на відрізку $[\alpha\mu^2,\beta\mu^2]$.

Доведення теореми є аналогічним доведенню теореми 1.

3. *Побудова асимптотичного розв'язку задачі в околі нульової точки повороту*

Тепер повернемося до розгляду рівняння (1) за умови існування нульової точки повороту. Нехай функції $a_0(\tau)$ та $b_0(\tau)$ можна подати у вигляді $a_0(\tau)=\tau a_{10}(\tau)$, $b_0(\tau)=\tau^2 b_{10}(\tau)$. Тоді корені характеристичного рівняння визначимо за формулою:

$$\lambda_{1,2}(\tau)=-\frac{1}{2}\tau\left(a_{10}(\tau)\pm\sqrt{a_{10}^2(\tau)-4b_{10}(\tau)}\right). \tag{14}$$

Розглянемо задачу Коші для рівняння (1) з початковими умовами:

$$x\left(\beta\sqrt{\varepsilon},\varepsilon\right)=y_{10},\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\beta\sqrt{\varepsilon}}=y_{20}, \tag{15}$$

де $\beta>0$ – дійсне число, y_{10} і y_{11} не залежать від ε.

Спочатку, використовуючи теорему 1, побудуємо m-наближення до загального розв'язку рівняння (1) для випадку $t\in[\beta\sqrt{\varepsilon},L]$ у вигляді:

$$x_m^{(2)}(t,\varepsilon)=a_1^{(2)}(\varepsilon)x_{1m}(t,\varepsilon)+a_2^{(2)}(\varepsilon)x_{2m}(\varepsilon),$$

де

$$x_m^2(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\beta\sqrt{\varepsilon}}^{t}\left(\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i\varphi_{ki}(\tau)\right)dt'\right),\ k=1,2;$$

$a_k^2(\varepsilon),\ k=1,2$ – довільні сталі, які визначаються з (15).

Побудуємо тепер розв'язок рівняння (1) в околі точки повороту, тобто при $t\in[0,\beta\sqrt{\varepsilon}]$. Виконуючи заміну $t=\xi\sqrt{\varepsilon}$ ($\xi\in[0,\beta)$) та беручи до уваги позначення $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, $\xi\mu^2=\eta$, $x=z(\xi,\mu)$, подамо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{d^2z(\xi,\mu)}{d\xi^2}+\eta a_{10}(\eta\mu)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^{2i-1}a_i(\eta\mu)\frac{dz(\xi,\mu)}{d\xi}+$$

$$+\left(\eta^2 b_{10}(\eta\mu)+\sum_{i=1}^{\infty}b_i(\eta\mu)\mu^{2i-2}\right)z(\xi,\mu)=$$

$$=\mu h(\eta\mu)\int_{-\infty}^{\xi}G\left((\xi-\xi')\mu,\eta'\mu\right)z(\xi',\mu)\,d\xi. \tag{16}$$

Припустимо, що коефіцієнти a_{01}, b_{01}, $a_i(\tau)$, $b_i(\tau)$, $i=\overline{1,\infty}$, функція $h(\tau)$, допускають розвинення в ряд Тейлора в околі точки $\tau=0$. Тоді:

$$a_{10}(\eta\mu)=a_{10}(0)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\frac{a_{10}^{(i)}(0)}{i!}\eta^i,$$

$$a_i(\eta\mu) = a_i(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \frac{a_i^{(j)}(0)}{j!}\eta^j,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{2i-1} a_i(\eta\mu) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \mu^{2i+j-1} \frac{a_i^{(j)}(0)}{j!}\eta^j = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{\tilde{a}}_i(\eta), \tag{17}$$

звідки

$$\eta a_{10}(\eta\mu) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{2i-1} a_i(\eta\mu) = \eta a_{10}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{a}_i(\eta). \tag{18}$$

Аналогічно дістанемо:

$$\eta^2 b_{10}(\eta\mu) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{2i-2} b_i(\eta\mu) = b_{10}(0)\eta^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{b}_i(\eta) + b_1(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{b}_i(\eta). \tag{19}$$

І, нарешті, для $h(\eta\mu)$ будемо мати:

$$h(\eta\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{(i)}(0)}{i!}(\eta\mu)^i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{h}_i(\eta) . \tag{20}$$

Підставляючи (18)-(20) в (16), дістанемо:

$$\frac{d^2 z(\xi,\mu)}{d\xi^2} + \eta a_{10}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{a}_i(\eta) \frac{dz(\xi,\mu)}{d\xi} + \left(\eta^2 b_{10}(0) + b_1(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{b}_i(\eta)\right) z(\xi,\mu) =$$

$$= \mu \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \tilde{h}_i(\eta) \int_{-\infty}^{\xi} G((\xi-\xi')\mu, \eta'\mu) z(\xi',\mu) d\xi'. \tag{21}$$

Якщо $\forall\xi\in[0,\beta)$, $\eta^2(a^2_{10}(0)-4b_{10}(0)-4b_1(0))\neq 0$, то за теоремою 2 рівняння (21) має загальний розв'язок, m-наближення якого можна побудувати у вигляді:

$$x_m^{(1)}(t,\varepsilon) = a_1^{(1)}(\xi) x_{1m}^{(1)}(t,\varepsilon) + a_1^{(1)}(\xi) x_{2m}^{(1)}(t,\varepsilon);$$

$$t \in \left[0, \beta\sqrt{\varepsilon}\right],$$

де

$$x_{km}^{(1)}(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\beta\sqrt{\varepsilon}}^{t} \lambda_{km}\left(\frac{\tau'}{\sqrt{\varepsilon}}, \sqrt{\varepsilon}\right) dt'\right), \quad k = 1,2;$$

$$\lambda_{km}\left(\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}, \sqrt{\varepsilon}\right) = \sum_{i=0}^{m} \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^i \lambda_{ki}\left(\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Сталі $a_1^{(1)}(\varepsilon)$, $a_2^{(1)}(\varepsilon)$ визначаються як розв'язки системи $x_m^{(1)}(\beta\sqrt{\varepsilon},\varepsilon)=y_{01}$,

$$\left.\frac{dx_m^{(1)}}{dt}\right|_{t=\beta\sqrt{\varepsilon}} = y_{20}.$$

Таким чином, для рівняння (1) при наявності нульової точки повороту побудовано неперервне разом зі своєю похідною m-на-ближення розв'язку:

$$x_m(t,\varepsilon) = \begin{cases} x_m^{(1)}(t,\varepsilon), & t \in \left[0, \beta\sqrt{\varepsilon}\right], \\ x_m^{(2)}(t,\varepsilon), & t \in \left[\beta\sqrt{\varepsilon}, L\right], \end{cases}$$

яке задовольняє початкові умови (15).

Література

1. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1966. – С. 252.
2. Шкиль Н.И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – К.: Вища школа, 1985. – С. 248.
3. Лейфура В.М., Менько Я.П. Асимптотичний аналіз нестаціонарних систем автоматичного керування. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях: Зб. наук. праць / Кол. авт. – К.: Вища шк., 1993. – 180 с.
4. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
6. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
7. Шкіль М.І., Завізіон Г.В. Асимптотичне представлення розв'язку систем лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при наявності точок повороту // Доп. АН УРСР. Сер. А.: Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – С. 20-23.
8. Шкиль Н.И., Завизион Г.В. Асимптотическое представление решений дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами при наличии точек поворота. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1988.– С. 2-40.
9. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища школа, 1991. – 207 с.

Стаття надійшла до редколегії 05.02.2004 р.