УДК 519.876.2

Кошевий В.В., Трунов О.М., Миколаївський державний гуманітарний університет ім. Петра Могили

Формальні методи оцінки стану в задачах моделювання нелінійних систем керування

Для рішення задачі моделювання нелінійної системи керування розглядаються різні формальні методи оцінки стану системи. Як приклад, який ілюструє практичне застосування методів оцінки стану, роглядається задача по визначенню стану системи управління, фізичні процеси в якій описуються системою нелінійних стохастичних диференційних рівнянь. У статті проводиться порівняльний аналіз даних методів за точністю та інформативністю.

For solving the task of modeling nonlinear control system different formal methods of estimation of a system condition are compared. As an example, which illustrate practical use of estimation conditional methods, the task for determination real control system condition is considered. Physical processes in this system are determined by a system nonlinear differentials. In article the comparing analyse of some methods in accuracy and informative is considered.

Однією з задач теорії ідентифікації є визначення параметрів системи при заданій структурі. В результаті аналізу системи управління встановлюють відхилення параметрів системи від значень, що були розраховані, а також відхилення вихідних координат від заданих значень. Як приклад, що ілюструє практичне застосування методів оцінювання стану, розглянемо задачу по визначенню фактичного стану системи управління, фізичні процеси в якій описуються системою нелінійних стохастичних диференційних рівнянь.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dY_1}{dt} = Y_2, t \in [t_0, t_\varepsilon] \\ &\frac{dY_2}{dt} = k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + k_3 U(t) \\ &t = t_0, Y_1(t_0) = Y_{10}, Y_2(t_0) = Y_{20} \end{aligned}\right\}, \qquad (1.1)$$

де $U(t) = M[U(t)] + \sum_{\nu=1}^{2} (\beta_\nu \cos\omega t + \gamma_\nu \sin\omega t), \quad (1.2)$

$$k_3 = A\varphi(\sigma)[1 + a(Y_1 - L) + b(Y_1 - L)^2], \quad (1.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\sigma) = 0, при - 0 \le \sigma < \sigma_0 \\ &\varphi(\sigma) = c, при - \sigma_0 \le \sigma < \sigma_1 \\ &\varphi(\sigma) = 0, при - \sigma \ge \sigma_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.4)$$

У виразах (1.1)-(1.4) $Y1$, $Y2$ – вихідні координати, t – час, t_0, Y_{10}, Y_{20} – початкові умови, k_1, k_2 – істотні параметри системи, що змінюються у часі за невідомими законами, $U(t)$ – випадкова функція, $M[U(t)]$ – математичне очікування випадкової функції $U(t)$, $\beta\nu$, $\gamma\nu$ – випадкові величини з відомими (заданими) імовірнісними характеристиками, $\cos\omega t$ та $\sin\omega t$ – координатні функції канонічного розкладання випадкової функції $U(t)$, A, a, b, L – задані числа, σ – деяке число, що являє собою вхідну величину релейного елемента системи керування, $\varphi(\sigma)$ – коефіцієнт передачі релейного елемента, що визначається співвідношенням (1.4), де $\sigma = \varphi_1(Y_1,Y_2)$ – задана функція вихідних координат, c – задане число.

Розглянемо задачу для t_ε=18 год., Y_{10}=20, Y_{20}=0, Ω=3, ω=31,4; $M[U(t)]$=30, L=23, $M[\beta_1]=M[\beta_2]=M[\gamma_1]=M[\gamma_2]=0$, $D[\beta_1]=D[\gamma_1]=1,0$; $D[\beta_2]=D[\gamma_2]=0,25$; де M та D – відповідно математичне очікування та дисперсія.

Інтервали часу $[t_{s-1}, t_s]$ при $\Omega = 3$ виберемо наступним чином:

$t_0 = 0$, $t_1 = 6$, $t_2 = 12$, $t_3 = t\varepsilon = 18$,

де $s = 1$, $t \in [t_0, t_1]$, $\Delta T = t_1 - t_0 = 6$,

де $s = 2$, $t \in [t_1, t_2]$, $\Delta T = t_2 - t_1 = 6$,

де $s = 3$, $t \in [t_2, t_3]$, $\Delta T = t_3 - t_2 = 6$.

Початкові умови для диференціальних рівнянь чутливості вважаємо рівними нулю, тобто $U_{ip}(t = 0) = 0$, $W_{ij}(t = 0)$; $i = 1,\ldots,n$; $p = 1,\ldots,w$; $j = 1,\ldots,m$; $n = 2$; $w = 4$;

$m = 2$.

На кожному з трьох підінтервалів задаються значення параметрів k_{10}, k_{20}, δk_1, δk_2, де k_{10}, k_{20} – розрахункові значення параметрів системи k_1, k_2; δk_1, δk_2 – задані відхилення параметрів системи від розразункових значень. Тоді фактичні значення параметрів системи будуть

$$kj(t) = kj0 + \delta k_j(t), \qquad (1.5)$$

де $\delta k_j(t)$ – задане відхилення параметра k_j від розрахункованого значення.

Обчислюючи $kj(t)$ за формулою (1.5) відповідно для кожного часового підінтервалу, одержимо:
при $t \in [t_0, t_1]$, $k_{10} = 5,5$; $k_{20} = 2,5$; $\delta k_1 = -4,125$; $\delta k_2 = -1,875$; $k_1 = 1,375$; $k_2 = 0,625$;
при $t \in [t_2, t_1]$, $k_{10} = 1,4$; $k_{20} = 1,0$; $\delta k_1 = -0,4$; $\delta k_2 = -0,5$; $k_1=1,0$; $k_2=0,5$;
при $t \in [t_3, t_2]$, $k_{10} = 2,7$; $k_{20} = 0,5$; $\delta k_1 = -0,7$; $\delta k_2 = -0,25$; $k_1 = 2,0$; $k_2 = 0,25$;
для оцінки стану системи необхідно вирішити задачу ідентифікації системи, основною метою якої буде визначення поточних параметрів системи за формулою

$$k_j^* = k_{j0} + \Delta k_j^*(t),\ j = 1,\ldots,m,$$

тут $\Delta k_j^*(t)$ – відхилення параметра системи від розрахункового значення, що обраховано в результаті вирішення задачі за формулою

$$\Delta k_j^*(t) = \sum_{z=0}^{k} \delta k_{j,z}(t); \qquad (1.6)$$

$$\delta k_{j,z}(t) = \varepsilon_z \left\{ \frac{\partial I(t)}{\partial k_j} \Bigg/ \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial I(t)}{\partial k_j} \right]^2} \right\}_z . \qquad (1.7)$$

Рішення даної задачі ідентифікації розглядається в роботі [1] з використанням методів найменших квадратів та пошукових методів оптимізації:

- з використанням формул кінцевих (центральних) різниць і методу Доступова (ПО-1);
- з використанням методу повної (безпосередньої) лінеаризації (ПО-2);
- з використанням методу часткової лінеаризації (ПО-3).

В якості статистичного функціонала при рішенні задачі ідентифікації пошуковими методами оптимізації розглядався вираз

$$I = I(t) = M\left[\left\{ Y_1(t) - \overline{Y}_1(t) \right\}^2 \right], \qquad (1.8)$$

де $\overline{Y_1}$ – розрахункове (еталонне) значення вихідної координати системи (1.1), що обчислене при $k_1 = k_{10}$, $k_2 = k_{20}$.

Оскільки задача зводиться до визначення таких відхилень параметрів δk_1, δk_2, які забезпечують мінімум функціонала I, то ця задача співпадає із задачею пошуку оптимальних значень параметрів при синтезі систем управління.

При рішення задачі методом рекурентної апроксимації маємо:

$$\frac{dY_1}{dt} = Y_2;$$

$$\frac{dY_2}{dt} = k_1 Y_1 + k_2 \frac{dY_1}{dt}; \qquad (1.9)$$

$$\frac{d^2 Y_1}{dt^2} = k_1 Y_1 + k_2 \frac{dY_1}{dt}. \qquad (1.10)$$

$$k_1 = k_{10} + \Delta k_1; \qquad (1.11)$$

Позначимо $k_2 = k_{20} + \Delta k_2;$

$$\frac{dY_1}{dt} = \dot{Y}_1; \qquad (1.12)$$

$$\frac{d^2 Y_1}{dt^2} = \ddot{Y}_1; \qquad (1.13)$$

(1.14)

$$\Delta = Y_1 - Y_1^0;$$

$$\dot{\Delta} = \dot{Y}_1 - \dot{Y}_1^0; \qquad (1.15)$$

$$\ddot{\Delta} = \ddot{Y}_1 - \ddot{Y}_1^0. \qquad (1.16)$$

(1.17)

$$\ddot{Y}_1 - k_2 \dot{Y}_1 - k_1 Y_1 = 0. \qquad (1.18)$$

Маємо

(1.19)

$$\ddot{Y}_1^0 - k_{20} \dot{Y}_1^0 - k_{10} Y_1^0 = 0. \qquad (1.20)$$

Оскільки Y_1^0 повинно задовольняти умовам рівняння, маємо рівняння

$$r^2 - k_{20} r - k_{10} = 0.$$

Це лінійне рівняння другого порядку без правої частини, розглядаємо характеристичне рівняння

$$\frac{k_{20}}{4} + k_{10} > 0, \qquad (1.21)$$

Оскільки

$$Y_1^0 = c_1 e^{rt_1} + c_2 e^{r_2 t}, \qquad (1.22)$$

то рішення має вигляд

$$r_{1,2} = \frac{k_{20}}{2} \pm \sqrt{\frac{k_{20}^2}{4} + k_{10}} \qquad (1.23)$$

де

$$\begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = 20 \\ c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} = 0 \end{cases} \qquad (1.24)$$

корені характеристичного рівняння.

Для обчислення c_1 та c_2 використаємо початкові умови $Y_{10} = 20$, $Y_{20} = 0$ (при $t = 0$)

$$c_1 = \frac{20}{1 - \frac{r_2}{r_1}}, \qquad (1.25)$$

Вирішуючи систему, знаходимо

$$c_2 = \frac{20}{1 - \frac{r_1}{r_2}}. \qquad (1.27)$$

$$\Delta = c_1 e^{r_1^* t} + c_2 e^{r_2^* t}, \qquad (1.28)$$

Підставляючи (1.12)-(1.18) в (1.19), отримаємо

$$\left(\ddot{Y}_1^0 + \ddot{\Delta}\right) - \left(k_{20} + \Delta k_2\right)\left(\dot{Y}_1^0 + \dot{\Delta}\right) - \left(k_{10} + \Delta k_1\right)\left(Y_1^0 + \Delta\right) = 0.$$

Розкривши дужки, отримаємо

$$\ddot{\Delta} - (k_{20} + \Delta k_2)\dot{\Delta} - (k_{10} + \Delta k_1)\Delta = \qquad (1.29)$$

$$= \Delta k_2 \dot{Y}_1^0 + \Delta k_1 Y_1^0 \qquad (1.30)$$

лінійне рівняння другого порядку з правою частиною.

Загальне рішення без правої частини має вигляд

$$r_{1,2}^* = \frac{k_{20} + \Delta k_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(k_{20} + \Delta k_2)^2}{2} + k_{10} + \Delta k_1}. \qquad (1.31)$$

де

$$\widetilde{Y} = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}. \qquad (1.32)$$

Часткове рішення рівняння з правою частиною має вигляд

Підставляючи часткове рішення в рівняння (1.30), маємо

$$\begin{aligned} &(r_1^2 A_1 e^{r_1 t} + r_2^2 A_2 e^{r_2 t}) - \\ &- (k_{20} + \Delta k_2)(r_1 A_1 e^{r_1 t} + r_2 A_2 e^{r_2 t}) - \\ &- (k_{10} + \Delta k_1)(A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}) = \\ &= c_1(\Delta k_2 r_1 + \Delta k_1) e^{r_1 t} + c_2 (\Delta k_2 r_2 + \Delta k_1) e^{r_2 t}; \end{aligned} \qquad (1.33)$$

$$\begin{aligned} &(A_1 r_1^2 - k_{20} A_1 r_1 - \Delta k_2 r_1 A_1 - k_{10} A_1 - \Delta k_1 A_1) e^{r_1 t} + \\ &+ (A_2 r_2^2 - k_{20} A_2 r_2 - \Delta k_2 r_2 A_2 - k_{10} A_2 - \Delta k_1 A_2) e^{r_2 t} = \\ &= c_1 (\Delta k_2 r_1 + \Delta k_1) e^{r_1 t} + \\ &+ c_2 (\Delta k_2 r_2 + \Delta k_1) e^{r_2 t}; \end{aligned} \qquad (1.34)$$

$$\begin{cases} (A_1 r_1^2 - k_{20} A_1 r_1 - \Delta k_2 r_1 A_1 - k_{10} A_1 - \\ - \Delta k_1 A_1) = c_1 (\Delta k_2 r_1 + \Delta k_1) \\ (A_2 r_2^2 - k_{20} A_2 r_2 - \Delta k_2 r_2 A_2 - k_{10} A_2 - \\ - \Delta k_1 A_2) = c_2 (\Delta k_2 r_2 + \Delta k_1) \end{cases}; \qquad (1.35)$$

$$A_1 = \frac{c_1(\Delta k_2 r_1 + \Delta k_1)}{r_1^2 - (k_{20} + \Delta k_2) r_1 - (k_{10} + \Delta k_1)};$$

$$A_2 = \frac{c_2(\Delta k_2 r_2 + \Delta k_1)}{r_2^2 - (k_{20} + \Delta k_2) r_2 - (k_{10} + \Delta k_1)}. \qquad (1.36)$$

(1.37)

то

$$\begin{cases} c_1^* e^{r_1^* t} + c_2 e^{r_2^* t} + A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = 0 \\ r_1^* c_1^* e^{r_1^* t} + r_2^* c_2^* e^{r_2^* t} + r_1 A_1 e^{r_1 t} + r_2 A_2 e^{r_2 t} = 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Звідси

$$c_1^* = \frac{r_2^* A_1 e^{r_1 t} + r_2^* A_2 e^{r_2 t} - r_1 A_1 e^{r_1 t} - r_2 A_2 e^{r_2 t}}{(r_1^* - r_2^*) e^{r_1^* t}}, \quad (1.41)$$

$$c_2^* = \frac{r_1^* A_1 e^{r_1 t} + r_1^* A_2 e^{r_2 t} - r_1 A_1 e^{r_1 t} - r_2 A_2 e^{r_2 t}}{(r_2^* - r_1^*) e^{r_2^* t}}. \quad (1.42)$$

Отже, загальне рішення лінійного рівняння з правою частиною має вигляд

$$\Delta = c_1^* e^{r_1^* t} + c_2^* e^{r_2^* t} + A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}. \quad (1.43)$$

Розкладемо Δ у ряд і вирішимо наступне рівняння

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \dot{\Delta}_0 (\Delta_1 - \Delta_0) + \ddot{\Delta}_0 \frac{(\Delta_1 - \Delta_0)^2}{2}; \quad (1.44)$$

$$\frac{\ddot{\Delta}_0}{2} \Delta_1^2 + (\dot{\Delta}_0 - \ddot{\Delta}_0 \Delta_0 - 1) + \\ + (\Delta_0 - \dot{\Delta}_0 \Delta_0 + \frac{\ddot{\Delta}_0 \Delta_0^2}{2}) = 0; \quad (1.45)$$

$$D = (\dot{\Delta}_0 - 1)^2; \quad (1.46)$$

$$\begin{cases} \Delta_{1(1)} = \dfrac{\ddot{\Delta}_0 \Delta_0}{\ddot{\Delta}_0} = \Delta_0 \\ \Delta_{1(2)} = \dfrac{\ddot{\Delta}_0 \Delta_0 - 2\dot{\Delta}_0 + 2}{\ddot{\Delta}_0}, \end{cases} \quad (1.47)$$

звідси кожен наступний член ряду виражається через попередній рівнянням

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n - 2\frac{\dot{\Delta}_n - 1}{\ddot{\Delta}_n}. \quad (1.48)$$

Розглядаючи цю послідовність на інтервалах $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, визначаємо, що вона сходиться до наступних значень (табл. 1).

Таблиця 1

Границі послідовності на інтервалах

t	$[t_0, t_1]$	$[t_1, t_2]$	$[t_2, t_3]$
Δ	–0,003	–0,017	–0,056

Підставляючи (1.48) в (1.8), знаходимо $\Delta k_j^*(t)$ – відхилення параметра системи від розрахункового значення.

Результати рішення задачі різними методами наведені в табл. 2-6.

Таблиця 2

Метод найменших квадратів

Δk_j^*	Підінтервал		
	$[t_0, t_1]$	$[t_1, t_2]$	$[t_2, t_3]$
Δk_1^*	–4,510	–0,435	–0,763
Δk_2^*	–2,031	–0,540	–0,274

Таблиця 3

ПО-1

Δk_j*	Підінтервал		
	$[t_0, t_1]$	$[t_1, t_2]$	$[t_2, t_3]$
Δk_1*	–4,170	–0,385	–0,660
Δk_2*	–1,881	–0,521	–0,236

Таблиця 4

ПО-2

Δk_j*	Підінтервал		
	$[t_0, t_1]$	$[t_1, t_2]$	$[t_2, t_3]$
Δk_1*	–4,1198	–0,395	–0,665
Δk_2*	–1,8665	–0,490	–0,241

Таблиця 5

ПО-3

Δk_j*	Підінтервал		
	$[t_0, t_1]$	$[t_1, t_2]$	$[t_2, t_3]$
Δk_1*	–4,1177	–0,386	–0,661
Δk_2*	–1,8665	–0,516	–0,240

Таблиця 6

Метод рекурентної апроксимації

Δk_j*	Підінтервал		
	$[t_0, t_1]$	$[t_1, t_2]$	$[t_2, t_3]$
Δk_1*	–4,123	–0,372	–0,672
Δk_2*	–1,867	–0,480	–0,250

Оскільки процеси в системах управління описуються системою нелінійних стохастичних диференційних рівнянь, то для рішення поставленої задачі необхідно використовувати поняття збігання не в звичайному, а в імовірнісному сенсі.

В лабораторних умовах, а також на етапах проектування і теоретичних досліджень систем управління збігання експериментально-аналітичних методів оцінки стану можна дослідити за допомогою статистичних коефіцієнтів точності:

По математичному очікуванню вихідних координат системи

$$Q_{M_i} = \frac{\left| M[Y_i(t)] - M[Y_i^*(t)] \right|}{M[Y(t)_i]}. \qquad (1.49)$$

По дисперсії вихідних координат

$$Q_{D_i} = \frac{D[Y_i^*(t)]}{D[Y_i(t)]}. \qquad (1.50)$$

По параметрах системи

$$R_{k_j} = \frac{\Delta k_j^*}{\delta k_j} \qquad (j=1,\ldots,m). \qquad (1.51)$$

В табл. 7 наведені результати оцінки точності рішення задачі ідентифікації на підінтервалі $[t_0,\ t_1]$. Значення всіх коефіцієнтів для вихідної координати Y_1 обчислювались за формулами (1.49)-(1.51).

Таблиця 7

Коефіцієнт точності	**Метод**				
	НК	**ПО-1**	**ПО-2**	**ПО-3**	**РА**
$Q_м$, %	10,3	0,42	0,49	0,71	0,572
Q_D	0,71	0,86	0,92	0,96	0,902
R_{k1}	1,091	1,011	0,998	0,998	0,983
R_{k2}	1,102	1,003	0,996	0,995	0,984

В результаті рішення задачі ідентифікації встановлено, що найбільшою ефективністю по точності та інформативності володіють метод оцінки стану на основі пошукового методу оптимізації, в алгоритмі якого використовується метод безпосередньої лінеаризації, та метод рекурентної апроксимації.

Література

1. Козеев В.А. Повышение безотказности и точности нелинейных систем управления. – Ленинград: Энергоатомиздат, 1985. – С. 22-41.
2. Трунов А.Н. Применение метода рекурентной аппроксимации к решению нелинейных задач. – Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса // Сб. науч. тр. Выпуск 16. – М., МГОПУ, 1998. – С. 142-156.
3. Трунов О.Н. Застосування методу рекурентної апроксимації до розв’язку нелінійних задач // Наукові праці. – Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 1999. – С. 135-142.
4. Трунов О.М., Кошевий В.В. Порівняльний аналіз методів оцінки стану нелінійних систем керування. 7-th International Modelling School of AMSE-UAPL, 2002. – С. 31-34.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2004 р.